Géométrie de l'Interaction Différentielle et Développement de Taylor

Stefano Guerrini

1 Contexte

1.1 Le λ-calcul différentiel et le développement de Taylor

Grâce à une analyse fine de la structure des connecteurs exponentielles de la Logique Linéaire et de leur réduction dans les réseaux de preuve, Ehrhard et Regnier ont introduit le *λ-calcul différentiel* [ER03] et les *réseaux différentiels* [ER06], deux extensions du λ-calcul et des réseaux d'interaction (respectivement) qui modélisent deux types distincts d'applications des programmes aux valeurs en entrée : l'application usuelle du λ-calcul et une application linéaire. L'outil principal du λ-calcul différentiel est un opérateur formel de dérivation qui transforme l'application du λ-calcul en une somme formelles d'applications linéaires dans lesquelles l'argument remplace seulement une occurrence de la variable de la fonction. Ces sommes formelles du λ-calcul différentiel ont une correspondance sémantique et une interprétation mathématique tout à fait canonique : elles expriment dans la syntaxe l'addition vectorielle des sémantiques quantitatives (notamment, de la sémantique relationnelle) et elles correspondent aux sommes que l'on obtient dans l'analyse lorsqu'on calcule la dérivée d'un produit de fonctions.

L'introduction d'un opérateur de dérivation amène aussi à définir une notion de développement de Taylor des λ-termes. La série formelle qu'on obtient par cette développement a une interprétation calculatoire très interessante : elle permet d'analyser la normalisation d'un λ-terme par le biais de la normalisation de termes du λ-calcul avec ressources [Bou93], une version du λ-calcul où l'utilisation d'une ressource (un terme) est linéaire et le nombre de ressources (d'argument) qu'une fonction peux utiliser est borné.

Le λ-calcul avec ressources

Le calcul avec ressources introduit par Boudol [Bou93] est une extension du λ-calcul permettant de modéliser la consommation des ressources. En effet, l'argument d'une fonction est un multiensemble de ressources, ces dernières étant soit linéaires soit réutilisables. Une ressource linéaire doit être utilisée exactement une fois, alors qu'une ressource réutilisable peut être appelée plusieurs fois par la fonction. Exactement comme l'évaluation de l'application linéaire du λ-calcul différentiel, l'évaluation d'une fonction appliquée à un multiensemble de ressources a plusieurs résultats possibles, dus aux différentes possibilités de répartir les ressources dans les différentes occurrences du paramètre de la fonction. Le calcul avec ressource est donc intrinsèquement non-déterministe.

La liaison entre le calcul de Boudol et l'extension différentielle du λ-calcul et des réseaux a été reconnue tout d'abord par Ehrhard et Regnier et puis formellement établie par Tranquilli en [Tra11], où il définit une version non-paresseuse du calcul de Boudol et montre une correspondance de Curry-Howard entre ce calcul et les réseaux différentiels.

1.2 Géométrie de l'Interaction

La Géométrie de l'Interaction (GdI) est un outil puissant introduit par Girard [Gir89] pour étudier dans un cadre algébrique les propriétés calculatoires de la Logique Linéaire. Un approche qui a démontré toute sa puissance dans le cas du λ-calcul, où la GdI permet de réduire l'étude de la réduction d'un λ-terme à l'analyse de ses *chemins persistants* ; c'est-à-dire, des chemins entre des nœuds du graphe du λ-terme (le réseau de preuve associé) qui sont préservés par la réduction.

Cette approche s'applique à l'étude de la normalisation des λ-termes avec ressources, pour lesquels la GdI est particulièrement simple (à cause de la contrainte linéaire sur l'utilisation des ressources). On peut donc chercher d'utiliser la GdI des termes du développement de Taylor pour reconstruire la GdI d'un λ-terme. Cette étude, qui a été commencé par Solieri dans sa thèse, nécessite une analyse combinatoire très détaillée des correspondances entre les chemins persistants des termes du développement de Taylor et les chemins persistants du λ-terme de départ. C'est pour cette raison que Solieri [Sol16a] est arrivé à donner une solution pour un cas très particulier seulement.

La GdI a donné aussi un cadre théorique aux implémentations des réductions optimales du λ-calcul de Lévy [Lév78, AG98], et un cadre général pour l'utilisation des graphes de partage [Gue99]. Néanmoins, il manque encore une définition satisfaisante de GdI pour le λ-calcul différentiel d'Ehrhard et Regnier.

2 Objectifs

2.1 Géométrie de l'interaction et graphes de partage

Un des buts de la thèse sera d'étudier une GdI pour le λ-calcul et les réseaux d'interaction différentiels, à partir de laquelle pouvoir définir des graphes de partage différentiels. Une première solution a été envisagée par De Falco dans sa thèse [DF09]. La solution proposée par De Falco est pourtant encore partielle : à la fin de sa thèse, il décrit des relations intéressantes entre les graphes de partage et des représentations avec superposition de sommes de réseaux différentiels (ou de termes du calcul avec ressources), mais sans arriver à trouver des résultats positifs. Un étude des graphes de partage pour le λ-calcul différentiel, ou pour d'autres calculs algébriques obtenus en introduisant des sommes formelles de termes, pourra montrer si sur ces types de calculs on peut définir une notion de famille et une notion de réduction par famille optimale à la Lévy.

La piste qu'on envisage de suivre pour atteindre ce but prévoit d'utiliser la GdI des termes du développement de Taylor pour reconstruire la GdI d'un λ-terme. Cette approche a été déjà entamé par Solieri dans sa thèse et publié en [Sol16b] pour le cas très particulier d'un terme typé du type de constant de base. Malheureusement, ce travail n'arrive pas à adresser le problème de construire une interprétation générale en termes de GdI du développement de Taylor d'un terme quelconque. Une des première étape sera donc de reprendre et généraliser le travail de Solieri.

Références

[AG98] A. Asperti and S. Guerrini. *The optimal Implementation of Functional Programming Languages.* CTTCS, 45. CUP, 1998.

[Bou93] Gérard Boudol. The Lambda-Calculus with Multiplicities. INRIA Report 2025, 1993.

[DF09] Marc De Falco. *Géométrie de l'interaction et réseaux différentiels.* PhD thesis, Université de la Méditerranée, Aix-Marseille II, 2009.

[ER03] Thomas Ehrhard and Laurent Regnier. The differential lambda-calculus. *Theoretical Computer Science*, 309(1) :1–41, December 2003.

[ER06] Thomas Ehrhard and Laurent Regnier. Differential interaction nets. *Theoretical Computer Science*, 364(2) :166–195, November 2006. Special issue on Logic, Language, Information and Computation, 11th Workshop on Logic, Language, Information and Computation, Paris, France 19-22 July 2004, Edited by Queiroz R de and Cégielski P.

[Gir89] J.-Y. Girard. Geometry of Interaction I. Interpretation of system F. In R. Ferro, C. Bonotto, S. Valentini, and A. Zanardo, editors, *Logic colloquium '88*, volume 127 of *Studies in Logic and The Foundations of Mathematics*, pages 221–260. North-Holland, 1989.

[Gue99] Stefano Guerrini. A general theory of sharing graphs. *Theoretical Computer Science*, 227(1-2) :99–151, 1999.

[Lév78] Jean-Jacques Lévy. *Réductions Correctes et Optimales dans le lambda-calcul.* PhD Thesis, Université Paris 7, Paris, 1978.

[Sol16a] Marco Solieri. Geometry of resource interaction and taylor–ehrhard–regnier expansion : A minimalist approach. *Mathematical Structures in Computer Science*, 37 :1–43, 2016.

[Sol16b] Marco Solieri. Geometry of resource interaction and taylor–ehrhard–regnier expansion : A minimalist approach. *Mathematical Structures in Computer Science*, 37 :1–43, 2016.

[Tra11] Paolo Tranquilli. Intuitionistic differential nets and lambda-calculus. *Theoretical Computer Science*, 412(20) :1979–1997, 2011. Girard's Festschrift.

Encadrement

Stefano Guerrini, stefano.guerrini@univ-paris13.fr

Laboratoire d'accueil : LIPN - Laboratoire d'Informatique de Paris Nord (UMR 7030 du CNRS). Université Paris 13, Villetaneuse.

Le Laboratoire d'Informatique de Paris Nord (LIPN - UMR 7030) joue un rôle majeur dans la recherche en informatique fondamentale en Île-de-France. En particulier, le laboratoire accueille, dans l'équipe LoVe (Logique et Vérification), un groupe de chercheurs et enseignant-chercheurs ayant une expertise bien établie et reconnue de longue date en logique linéaire, avec des applications à plusieurs domaines de l'informatique fondamentale : théorie de la démonstration, lambda-calcul et programmation fonctionnelle, sémantique dénotationnelle, complexité implicite. Ces domaines font partie des axes portants de l'équipe LoVe et du LIPN.

À présent, 1 PR, 1 DR CNRS, 5 MCF et 3 CR CNRS travaillent activement sur ces thématiques. Le groupe conduit ou contribue à plusieurs projets de recherche nationaux autour du sujet, et mène régulièrement des collaborations internationales avec, entre autres, l'Italie, le Royaume Uni, le Japon, les Pays-Bas et la Danemark.