Réalisabilité et interprétation calculatoire de l'axiome du choix

Encadrant : Stefano Guerrini, LIPN, Univ. Sorbonne Paris Nord
Co-encadrant : Laura Fontanella, LACL, Univ. Paris-Est Créteil

May 2023

1 Contexte

Ce projet de recherche doctoral vise à extraire et analyser le contenu computationnel de la théorie des ensembles à travers des techniques de réalisabilité. La *réalisabilité* est une extension de la correspondance preuves-programmes également connue sous le nom d'isomorphisme de Curry-Howard. En réalisabilité, une théorie (ou un système logique) est interprétée à l'intérieur d'un modèle de calcul (typiquement une variante du λ-calcul [1]) en établissant une correspondance entre formules de la théorie et programmes, d'une manière qui soit compatible avec les règles de déduction. Les programmes associés à une formule donnée sont appelés les *réalisateurs* de cette formule. Par exemple, un réalisateur d'une implication $A \Rightarrow B$ est un programme qui, appliqué à un réalisateur de A, calcule un réalisateur de B. Inventée en 1945 par Kleene [4], la réalisabilité est l'implémentation de l'interprétation BHK[1] qui décrivait la conception intuitionniste des preuves mathématiques comme étant des algorithmes de calcul. Lorsqu'une formule A est réalisable, il est possible d'extraire de toute preuve de A un programme qui la réalise. C'est essentiellement le même procédé d'extraction que celui que l'on trouve au coeur d'assistants de preuves tels que `Coq`.

Née dans le cadre de l'intuitionnisme, la recherche en réalisabilité à évoluée jusqu'à inclure d'abord la logique classique, puis la théorie des ensembles. En particulier, Jean-Louis Krivine a développé une technique pour construire des modèles de réalisabilité pour ZF, la théorie des ensembles de Zermelo et Fraenkel (voir [5]). Les modèles de Krivine généralisent la méthode de forcing en théorie des ensembles et nous permettent d'extraire de toute démonstration dans ZF, des programmes executable dans la machine abstraite de Krivine (KAM). Ainsi on peut montrer, par exemple, que l'axiome de fondation est réalisé par le point fixe de Turing.

2 Objectifs

En ce qui concerne les modèles de réalisabilité de Krivine pour la théorie des ensembles, une question se démarque par son intérêt et sa difficulté :

> Quelle est l'interprétation calculatoire de l'axiome du choix (AC) ?

L'objectif de longue terme de ce projet est de répondre à cette question. Réaliser AC marquerait une évolution dans la conception des preuves comme programmes : née dans le cadre du constructivisme, la réalisabilité parviendrait à englober l'axiome du choix, paradigme des mathématiques non constructives. Au-delà de son intérêt théorique, répondre à cette question permettrait d'intégrer AC à

[1] Brouwer–Heyting–Kolmogorov.

des assistants de preuve comme Coq tout en préservant leur capacité d'extraction. Krivine a donné un début de réponse à cette question, en montrant que l'instruction 'quote' du langage LISP permet de réaliser l'axiome du choix *dépendant* (DC) qui correspond à une version dénombrable de AC (voir [6]). Ensuite, Fontanella et Geoffroy ont étendu sa méthode pour réaliser des versions plus-que-dénombrables de DC [2]. D'un autre côté, Krivine a récemment construit un modèle de réalisabilité pour l'axiome du choix complet [9]; toutefois, il n'est pas clair comment extraire un réalisateur explicite de AC à partir de ce modèle. L'objectif ambitieux de ce projet de thèse est précisément d'extraire des réalisateurs explicites de AC et d'explorer leur comportement calculatoire.

Dans le but de résoudre cette problématique, on pourra mobiliser différents formalismes de calcul. L'une des approches consistera à developper une nouvelle méthode centrée sur le $\lambda\mu$-calcul de M. Parigot [12] pour construire des modèles de réalisabilités pour la théorie des ensembles. Les travaux de O. Laurent (voir [10] et [11]) montrent un lien entre la KAM et le $\lambda\mu$-calcul, une variante du λ-calcul qui permet d'étendre la correspondance de Curry-Howard à la logique classique. Cependant, le pouvoir expressif de la KAM ne se limite pas à la logique classique, mais à toute formule démontrable dans la théorie des ensembles ZF, alors nous allons nous interesser à la possibilité de réaliser la théorie ZF en utilisant le $\lambda\mu$-calcul. Cela nous permettrait de mobiliser des méthodes propres à la théorie des types pour arriver à extraire un réalisateur explicite de AC.

Dans le cadre de ce projet, nous allons travailler également à une autre question ouverte qui est liée au problème de réaliser l'axiome du choix :

> Serait-il possible de réaliser l'*axiome de constructibilité*, $V = L$?

Les modèles de la théorie des ensembles s'obtiennent par deux méthodes opposés : d'un coté les modèles de forcing sont des *extensions* d'un modèle de départ (le ground model), de l'autre côté, les modèles internes sont des *sous-classes* d'un modèle de ZF. Le plus petit modèle interne est l'*univers des constructibles*, L, construit par Godel en 1938 [3] pour montrer la cohérence relative de l'hypothèse généralisée du continuum, GCH, et de l'axiome du choix. L'axiome de constructibilité $V = L$ établit que tout ensemble est constructible (c.à.d. tout ensemble est dans L), ce qui implique GCH et AC. Si la méthode de Krivine nous permet de construire des modèles de réalisabilité pour la théorie des ensembles en généralisant la méthode de forcing, aucune technique a encore été developpée pour construire dès modèles de réalisabilité par 'restriction' d'un modèle donné. Nous allons, donc, explorer la possibilité de transformer l'univers des constructibles L en un modèle de réalisabilité, de manière à pouvoir extraire le contenu computationnel de l'axiome de constructibilité. Un tel modèle serait en particulier un autre modèle de réalisabilité pour l'axiome du choix, ainsi cela représente une autre direction de recherche pour la resolution du problème principale au coeur de ce projet, le problème de déterminer le contenu calculatoire de l'axiome du choix.

References

[1] H. P. Barendregt. The lambda calculus. Its syntax and semantics. Studies in logic and foundations of mathematics, vol. 103. North-Holland Publishing, 1984.

[2] L. Fontanella and G. Geoffroy. Preserving cardinals and weak forms of Zorn's lemma in realiz- ability models. Mathematical Structures in Computer Science, Vol. 30 (9), Oct. 2020 , pp. 976 - 996

[3] K. Gödel, The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis. Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. 24 (1938), 556-557. Zbl. 020.29701.

[4] S. C. Kleene, On the interpretation of intuitionistic number theory. JSL, vol. 10, N. 4 (1945).

[5] JL. Krivine, Typed lambda-calculus in classical Zermelo-Fraenkel set theory. Arch. Math. Logic 40, 189?205 (2001).

[6] JL. Krivine, Dependent choice, ?quote' and the clock. Th. Comp. Sc., 308, p. 259-276 (2003).

[7] JL. Krivine, Realizability in classical logic. Cours doctoral à l'Université de Marseille (2004).

[8] J.-L.Krivine. Realizability algebras II: new models of ZF+DC. Log. Methods Comp. Sc. 8 (1:10) p. 1-28 (2012).

[9] Krivine, JL. A program for the full axiom of choice. Log. Met. Comp. Sc. Volume 17, Issue 3, pp. 21:1?21:22, (2021).

[10] O. Laurent, Interprétation calculatoire de la logique classique : $\lambda\mu$-calcul et machine de Krivine (2002) hal-00003753f.

[11] O. Laurent, Polarized proof-nets and $\lambda\mu$-calcul. *Theoretical Computer Science* 290(1): 161-188 (2003).

[12] M. Parigot. $\lambda\mu$-calculus : an algorithmic interpretation of classical natural deduction. In *Proceedings of Internation Conference on Logic Programming and Automated Deduction*, volume 624 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 190-201. Springer (1992).