

COHOMOLOGIE NON RAMIFIÉE ET ARITHMÉTIQUE SUR $\mathbf{Q}_p(t)$

OLIVIER WITTENBERG

Proposition de sujet de thèse au LAGA (USPN).

L'un des problèmes les plus anciens de la théorie des nombres (remontant au moins à Diophante) consiste à déterminer quand un système d'équations polynomiales donné, à coefficients dans \mathbf{Q} , possède, ou ne possède pas, une solution à coordonnées dans \mathbf{Q} . Il s'avère que la nature de ce problème dépend fondamentalement de la géométrie de la variété algébrique sous-jacente. Lorsque celle-ci est rationnellement connexe (large classe de variétés contenant notamment les espaces homogènes de groupes linéaires, les hypersurfaces projectives de bas degré, les variétés de Fano), on dispose au moins d'un cadre conjectural précis, sur \mathbf{Q} et plus généralement sur tout corps de nombres, pour y répondre : les points rationnels devraient être contrôlés par le groupe de Brauer non ramifié, via l'obstruction de Brauer–Manin (travaux de Manin, Colliot-Thélène, Sansuc, Swinnerton-Dyer, ...). Le groupe de Brauer non ramifié est par ailleurs un invariant birationnel fort utile, qui a notamment permis à Saltman et à Bogomolov, dans les années 1980, de répondre par la négative au problème de Noether sur \mathbf{C} (rationalité stable des espaces homogènes de SL_n à stabilisateurs finis).

Le groupe de Brauer non ramifié est aujourd'hui compris comme le premier d'une suite d'invariants des variétés algébriques lisses dénommée « cohomologie non ramifiée ». Cette généralisation a joué un rôle central aussi bien dans les questions de rationalité de variétés algébriques complexes (notamment, dans les nouvelles réponses négatives au problème de Noether données par Peyre via l'étude de $H_{\mathrm{nr}}^3(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$ pour $X = \mathrm{SL}_n/G$ sur \mathbf{C} , ou, plus récemment, dans les travaux de Voisin sur la rationalité stable et la spécialisation des décompositions de la diagonale) que dans l'étude des cycles algébriques (défaut des conjectures de Hodge et de Tate entières pour les cycles de codimension 2) et, enfin, dans l'étude des points rationnels des variétés rationnellement connexes sur des corps de base d'intérêt arithmético-géométrique (comme le corps des fonctions d'une courbe sur un corps p -adique), par la formulation d'obstructions de réciprocité à l'existence de points rationnels (Colliot-Thélène, Parimala, Suresh, ...).

Même dans les cas les plus simples, la cohomologie non ramifiée reste à ce jour un invariant mystérieux et difficile à déterminer ; de façon parallèle, l'arithmétique des variétés rationnellement connexes sur le corps $\mathbf{Q}_p(t)$ n'est aujourd'hui comprise que pour les variétés les plus simples (comme les quadriques, lorsque $p \neq 2$).

Afin de progresser sur ces sujets on se propose d'étudier les deux problèmes suivants :

Date: 11 mai 2023.

- (1) Pour $k = \mathbf{Q}_p(t)$, les produits de Massey de $n \geq 3$ classes de cohomologie galoisienne $a_1, \dots, a_n \in H^1(k, \mathbf{Z}/l\mathbf{Z})$ s'annulent-ils dès qu'ils sont définis? Une réponse positive est conjecturée par Mináč and Tân pour tout corps k , et a été récemment démontrée pour tout corps de nombres k . La question se reformule en termes de problème de plongement. Or les travaux de Harbater et Pop sur $\mathbf{Q}_p(t)$ concernant le problème de Galois inverse et les problèmes de plongement scindés montrent que l'arithmétique de ce corps est par certains aspects plus accessible que celle des corps de nombres—ainsi par exemple sait-on que le problème de Galois inverse admet une réponse positive sur $\mathbf{Q}_p(t)$ pour tout groupe fini. Les obstructions de réciprocity et donc la cohomologie non ramifiée de degré 3 jouent très vraisemblablement un rôle dans ce problème (les variétés sous-jacentes étant des espaces homogènes de SL_n sur $\mathbf{Q}_p(t)$ associés aux problèmes de plongement dont il est question ici).
- (2) Pour $k = \mathbf{Q}_p(t)$, étant donnée une surface X fibrée en coniques sur \mathbf{P}_k^1 , peut-on déterminer le groupe de Chow $A_0(X)$ des zéro-cycles de degré 0 sur X ? La détermination de ce groupe pour au moins une telle surface (en dehors du cas où X est rationnelle sur k) serait déjà d'un grand intérêt. Une version de l'obstruction de réciprocity pour les zéro-cycles, faisant encore intervenir la cohomologie non ramifiée de degré 3, joue certainement un rôle, au vu de la solution du problème analogue sur k corps de nombres établie par Salberger dans les années 1990.

L'étude de ces deux problèmes amènera naturellement le candidat à considérer de façon préliminaire des problèmes plus simples mais d'intérêt indépendant concernant notamment la détermination des groupes de cohomologie non ramifiée, comme le suivant :

Soient G un groupe fini et k un corps, disons de caractéristique 0. Choisissons un plongement $G \subset SL_n(k)$ pour un $n \geq 1$ et considérons l'espace homogène $X = SL_n/G$ sur k . Le groupe $Br_{nr}(X)/Br(k)$ est un groupe abélien fini ne dépendant que de G et de k . Lorsque k est algébriquement clos, il est déterminé par une formule due à Bogomolov. Pour k arbitraire, sa partie algébrique est déterminée par une autre formule, due à Harari. On aimerait savoir déterminer ce groupe en entier (i.e. sa partie transcendante) sans supposer k algébriquement clos. Un premier problème à résoudre consisterait à déterminer l'existence d'un algorithme prenant en entrée G et k et fournissant en sortie la structure de ce groupe abélien fini. Lorsque k est un corps de nombres, on pourrait espérer ensuite mettre au point une méthode pour déterminer l'obstruction de Brauer–Manin à l'approximation faible sur cette variété, ce qui aurait pour conséquence de préciser quelles réponses au classique problème de Grunwald on est en droit d'attendre pour G .

INSTITUT GALILÉE, UNIVERSITÉ SORBONNE PARIS NORD, 99 AVENUE JEAN-BAPTISTE CLÉMENT, 93430 VILLETANEUSE, FRANCE

Email address: wittenberg@math.univ-paris13.fr