

Université Sorbonne Paris Nord
École Doctorale Galilée
Sujet de thèse en mathématique
Période : 2023-2026.

Sujet : **Singularités en temps fini pour des équations aux dérivées partielles liées à la géométrie**

Nejla Nouaili

Nejla.Nouaili@dauphine.fr

CEREMADE, Université Paris Dauphine, Paris Sciences et Lettres.

Hatem Zaag

Hatem.Zaag@univ-paris13.fr

Université Sorbonne Paris Nord,

LAGA, CNRS (UMR 7539), F-93430, Villetaneuse, France.

L'apparition de singularités en temps fini est un phénomène que l'on rencontre dans beaucoup d'EDP non linéaires (chaleur, ondes, Schrödinger, Korteweg-de Vries (KDV), flots géométriques,...). Ainsi, des solutions régulières à $t = 0$ commencent à prendre des valeurs non bornées et ne peuvent être prolongées au delà d'un temps maximum d'existence $T > 0$. On dit qu'elles **explorent en temps fini**.

Certains phénomènes d'explosion en temps fini sont liés à la géométrie du domaine ou des objets considérés. C'est justement l'objet de ce sujet de thèse, avec deux points de vue liés:
+ les équations semilinéaires de la chaleur posées sur une variété,
+ le mouvement par courbure moyenne.

1 **Équation de la chaleur semilinéaire sur une variété riemannienne**

Le comportement des EDP peut dépendre de l'espace Ω où elles sont considérées. Il est classique dans la littérature de comparer le cas où $\Omega = \mathbb{R}^N$ avec le cas où Ω est un domaine borné avec des conditions aux limites. Cependant, dans les deux cas, l'espace est *plat*, ce qui pourrait empêcher de voir l'effet de la courbure de l'espace, très importante dans de nombreuses situations physiques. Pour cette raison, on s'intéresse au problème d'explosion en temps fini pour des EDP posées sur une variété.

L'étude des EDP sur des variétés est un sujet qui a suscité l'intérêt de plusieurs auteurs. On peut citer le travail de Pausader, Tzvetkov et Wang [PTW14] pour l'équation de Schrödinger sur \mathbb{S}^3 , ou encore le travail de Matano, Punzo et Alberto [MPT15] pour l'équation de la chaleur posée sur l'espace hyperbolique.

Dans [MNZ15], on considère avec Mahmoudi une équation de la chaleur posée sur le cercle et on construit une solution explosant en un point.

Dans cette partie, on cherche à généraliser l'étude faite dans [MNZ15] et construire une solution définie sur une variété riemannienne compacte de dimension N , qui explose en temps fini en un seul point. Notre objectif est de voir comment la courbure de la variété peut influencer le comportement de la solution singulière par rapport au cas de l'espace plat. Concrètement, on considère l'équation suivante:

$$\partial_t u = \Delta_g u + |u|^{p-1} u, \quad (1)$$

définie sur une variété riemannienne compacte (M, g) de dimension N , avec $u(t) : x \in M \rightarrow \mathbb{R}$, Δ_g est le laplacien de Beltrami sur M et $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$.

2 Mouvements par courbure moyenne

Le mouvement par courbure moyenne d'une hypersurface, connu aussi sous le nom de 'mean curvature flow' (*MCF*), peut être décrit par l'équation suivante:

$$\begin{cases} \partial_t u &= \frac{\partial_{xx} u}{1 + (\partial_x u)^2} - \frac{n-1}{u}, & x \in \mathbb{R}, t > 0. \\ u(x, 0) &= u_0(x) > 0, & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2)$$

Angenent et Vélazquez dans [AVJRN97] ont déjà construit des solutions singulières pour ce type d'équation, dans le sens où $u \rightarrow 0$ en temps fini. Ils ont aussi donné une description formelle de quelques comportements singuliers (ou *profils*) sans preuve rigoureuse. Dans cette partie, on compte proposer une construction rigoureuse de ces solutions.

References

- [AVJRN97] S.B. Angenent and J. J. L. Velázquez. Degenerate neckpinches in mean curvature flow. *J. Reine Angew. Math.*, (482):15–66, 1997.
- [MNZ15] F. Mahmoudi, N. Nouaili and H. Zaag. Construction of a stable periodic solution to a semilinear heat equation with a prescribed profile. *Nonlinear Anal.*, 300-324, 2016.
- [MPT15] H. Matano, F. Punzo and A. Tesi. Front propagation for nonlinear diffusion equations on the hyperbolic space. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 2015, 1199-1227.
- [PTW14] B. Pausader, N. Tzvetkov and X. Wang, Global regularity for the energy-critical NLS on \mathbb{S}^3 *Ann. Inst. H. Poincaré C Anal. Non Linéaire*, 31(2):315–338, 2014.