Sujet de thèse

Titre : Propriétés géométriques des graphes de bascules de surfaces
Encadrant : Lionel Pournin
Contact : lionel.pournin@univ-paris13.fr
Lieu: LIPN, Université Sorbonne Paris Nord, Villetaneuse

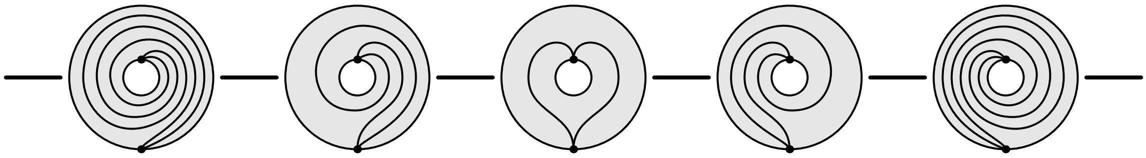
Contexte

Les graphes de bascules (en anglais *flip-graphs*) sont des objets centraux en algorithmique, en combinatoire et en topologie de basse dimension. En informatique, ils apparaissent dans le contexte du stockage de données [19], des codes de Gray [1], de la génération aléatoire [2, 5] ou de questions de complexité algorithmique [4, 17]. En mathématiques, ils apparaissent comme modèle combinatoire du *mapping class group* d'une surface [11, 12, 13, 14, 17], comme dual du complexe d'arcs [8, 10] et sont liés à de nombreuses familles de polytopes issus de la combinatoire algébrique ou de la physique théorique [3, 15, 16].

L'objectif de ce projet de thèse est de mieux comprendre la géométrie des graphes de bascules des surfaces afin d'une part d'étudier certaines questions algorithmiques comme la complexité du calcul de distances ou l'efficacité des générateurs aléatoires dans ces graphes et d'autre part d'étudier la géométrie du mapping class group de ces surfaces. Ces questions sont dans les thèmes centraux de l'équipe de combinatoire (CALIN) du LIPN : Lionel Pournin (professeur), Thierry Monteil (chercheur CNRS) et Pallavi Panda (ATER) contribuent tous les trois à l'étude des surfaces (voir par exemple [10, 11, 15]). Les questions liées à la complexité algorithmique et à l'efficacité de certains processus de génération aléatoire sont en lien avec l'axe d'analyse d'algorithmes de l'équipe.

Description

Considérons une surface topologique orientable Σ munie d'un sous-ensemble fini P de points tel que chaque composante connexe de bord contient au moins un de ces points. Un ensemble maximal d'arcs dans Σ dont les extremités sont dans P et qui ne se croisent pas deux-à-deux est une triangulation de Σ. Ici les arcs sont considérés à isotopie près. On peut transformer une telle triangulation en une autre par une bascule d'arête, une opération qui consiste à enlever un arc incident à deux triangles différents et à le remplacer par l'unique autre arc tel quel l'ensemble d'arcs résultant de cette opération est une triangulation de Σ. Le



$\mathcal{F}(\Sigma)$ lorsque Σ est un anneau [14].

graphe de bascule $\mathcal{F}(\Sigma)$ de Σ est le graphe dont les sommets sont les triangulations de Σ et dont les arêtes correspondent aux bascules. D'après le lemme de Švarc–Milnor [20, 9], $\mathcal{F}(\Sigma)$ est un modèle combinatoire du *mapping class group* de Σ dans le sens où il est quasi-isométrique aux graphes de Cayley du mapping class group. En particulier, la géométrie du mapping class group peut être approchée à constante près par celle du graphe de bascule.

Les constantes de la quasi-isométrie entre le graphe de bascule et le mapping class group sont liées à la géométrie du graphe de bascule *modulaire* $\mathcal{MF}(\Sigma)$ obtenu en quotientant $\mathcal{F}(\Sigma)$ par les homéomorphismes de Σ. Le diamètre de $\mathcal{MF}(\Sigma)$ a été étudié [11, 12, 13] dans certains cas mais de nombreuses questions restent ouvertes. L'objectif de ce projet de thèse est de progresser dans la compréhension de la géométrie de $\mathcal{F}(\Sigma)$ et $\mathcal{MF}(\Sigma)$ et des questions algorithmiques associées. Voici quelques-unes des pistes qui seront abordées.

- l'expansion de ces graphes, mesurée par exemple par leur constante de Cheeger n'est pas connue. Après un travail préliminaire du candidat pendant son stage de M2 dans le cas où Σ est un disque épointé ou un ruban de Möbius, il s'agit de classifier les surfaces en fonction du comportement asymptotique de leur constante de Cheeger lorsque $|P|$ tend vers l'infini. On cherchera si le temps le permet à transférer les techniques mises en œuvre à l'étude de la constante de Cheeger d'autres graphes similaires comme le *graph of graphs* [18].
- Le diamètre de $\mathcal{MF}(\Sigma)$ n'est connu que lorsqu'il est écrit en fonction du nombre de points de P placés sur une des composantes du bord de Σ et pour certaines surfaces [11, 12, 13]. On tentera de généraliser ces résultats au cas où l'estimation est en fonction de $|P|$.
- Il n'y a pas d'algorithme d'α-approximation connu pour la distance de bascule lorsque $\alpha < 2$. Les résultats obtenus dans [17] suggèrent que les heuristiques utilisées en pratique ne sont pas des algorithmes d'approximation. En se basant sur les résultats obtenus sur la géométrie de $\mathcal{F}(\Sigma)$ et de $\mathcal{MF}(\Sigma)$, on tentera de prouver que ce n'est pas le cas.

On s'appuiera sur différents résultats récents, comme par exemple l'estimation de la constante de Cheeger du graphe de bascules d'un polygone obtenu dans [5], la méthode des flots pour l'obtention de bornes inférieures pour les constantes de Cheeger de graphes décrite dans [2, 5, 6], les propriétés du modèle de Sleator–

Tarjan–Thurston des chemin géodésiques dans les graphes de bascules dont certaines n'ont été obtenues que récemment [19, 17], et les techniques d'estimation de distances dans ces graphes mises en œuvre dans [11, 12, 13, 15, 17].

References

[1] Jean Cardinal, Hung P. Hoang, Arturo Merino, Ondřej Mička, Torsten Mütze, Combinatorial Generation via Permutation Languages. V. Acyclic Orientations, SIAM Journal on Discrete Mathematics **37**(3), 1509–1547 (2023)

[2] Jean Cardinal, Lionel Pournin, The expansion of half-integral polytopes, preprint, arXiv:2402.14343 (2024)

[3] Jean Cardinal, Lionel Pournin, Mario Valencia-Pabon, Diameter estimates for graph associahedra, Annals of Combinatorics **26**, 873–902 (2022)

[4] Jean Cardinal, Lionel Pournin, Mario Valencia-Pabon, The rotation distance of brooms, European Journal of Combinatorics **118**, 103877 (2024)

[5] David Eppstein, Daniel Frishberg, Improved mixing for the convex polygon triangulation flip walk, 50th International Colloquium on Automata, Languages, and Programming (ICALP 2023), Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs), vol. 261, 56:1–56:17 (2023)

[6] Volker Kaibel, On the expansion of graphs of 0/1-polytopes, The sharpest cut: the impact of Manfred Padberg and his work, MOS-SIAM Series on Optimization, Mathematical Optimization Society/Society for Industrial and Applied Mathematics, 199–216 (2004)

[7] Samuel LeliÃ¨vre, Thierry Monteil, Barak Weiss, Everything is illuminated, Geometry & Topology **20**(3), 1737–1762 (2016)

[8] Howard A. Masur, Yair N. Minsky, Geometry of the complex of curves. I. Hyperbolicity, Inventiones Mathematicae **138**(1), 103–149 (1999)

[9] John Milnor, A note on curvature and fundamental group, Journal of Differential Geometry **2**, 1–7 (1968)

[10] Pallavi Panda, Strong collapsibility of the arc complexes of orientable and non-orientable crowns, preprint, arXiv:2402.10530 (2024)

[11] Hugo Parlier, Lionel Pournin, Flip-graph moduli spaces of filling surfaces, Journal of the European Mathematical Society **19**(9), 2697–2737 (2017),

[12] Hugo Parlier, Lionel Pournin, Modular flip-graphs of one holed surfaces, European Journal of Combinatorics **67**, 158–173 (2018)

[13] Hugo Parlier, Lionel Pournin, Once punctured disks, non-convex polygons, and pointihedra, Annals of Combinatorics **22**, 619–640 (2018)

[14] Hugo Parlier, Lionel Pournin, Counting geodesics between surface triangulations, preprint, arXiv:2308.05688 (2023)

[15] Lionel Pournin, The diameter of associahedra, Advances in Mathematics **259**, 13–42 (2014)

[16] Lionel Pournin, The asymptotic diameter of cyclohedra, Israel Journal of Mathematics **219**(2), 609–635 (2017)

[17] Lionel Pournin, Zili Wang, *Strong convexity in flip-graphs*, preprint, arXiv:2106.08012 (2021).

[18] Kasra Rafi, Jing Tao, The diameter of the thick part of moduli space and simultaneous Whitehead moves, Duke Mathematical Journal **162**(10), 1833–1876 (2013)

[19] Daniel Sleator, Robert Tarjan, William Thurston, Rotation distance, triangulations, and hyperbolic geometry, Journal of the American Mathematical Society **1**(3), 647–681, (1988)

[20] A. S. Švarc, A volume invariant of coverings, Doklady Akademii Nauk SSSR **105**, 32–34 (1955)