Contrat Doctoral — ED Galilée

Logique Linéaire Différentielle et Théorie des Types

- Unité de recherche : LIPN
- Discipline : Informatique
- Direction de thèse : Marie Kerjean (CR CNRS, LIPN, Université Sorbonne Paris Nord) et Stefano Guerrini (HDR) (Professeur des Universités, LIPN, Université Sorbonne Paris Nord)
- Contact : marie.kerjean@lipn.fr
- Domaine de recherche : Logique
- Mots-clés : Logique, Théorie des types, Sémantique catégorique

Contexte scientifique de la thèse

Logique Linéaire Différentielle La sémantique dénotationnelle traduit les programmes par des fonctions entre certaines structures mathématiques, permettant ainsi de prouver des résultats de correction sur les langages de programmation. Les structures abstraites en question mettent en valeur certains aspects fondamentaux de la programmation. Ainsi, la sémantique de Scott interprète les programmes par des fonctions *monotones*, traduisant l'idée qu'un programme exprime plus de résultat quand plus de données lui sont fournies. Un raffinement de cette sémantique introduit par Girard [6] permet d'importer en sémantique dénotationnelle des outils issus de l'algèbre linéaire. Un programme interprété par une fonction linéaire utilisera une et une seule fois ses données. Cette nouvelle perspective sur la linéarité des programmes a eu une influence considérable en informatique, par exemple en programmation fonctionnelle typée [**?**], en complexité implicite ou dans le domaine des assistants à la preuve. Elle s'exprime particulièrement bien à travers la correspondance de Curry-Howard, qui associe à une formule logique un *type de donnée* et à une preuve logique un programme représentant la construction de cette preuve. La *logique linéaire* traduit à travers l'introduction de nouveaux connecteurs logiques la notion de consommation de ressources d'un programme. La logique linéaire différentielle [5] introduit en logique les règles permettant de *linéariser* les preuves. Ce rapprochement entre logique et calcul différentiel permet l'introduction d'outils *quantitatifs* puissants pour l'étude des programmes [2], ainsi que d'intuitions nouvelles sur la programmation probabiliste et différentielle [3]. En collaboration avec Pierre-Marie Pédrot [9], Marie Kerjean a également montré comment des transformations de preuves datant des débuts de la logique formelle correspondent en fait à des algorithmes de différentiation. Ainsi, Dialectica, l'un des premiers travaux de Gödel, est en fait l'adaptation en logique intuitionniste de l'algorithme de rétroprogragation des différentielles qui apparaîtra 30 ans plus tard.

Types dépendants La théorie des types désigne l'étude de la logique d'un point de vue plus proche de la programmation : elle construit en même temps les formules logiques (les types) et les programmes qui ont ce types là. Au delà de la seule question de ce qui est linéaire ou pas, la théorie des types s'intéresse aux règles pour transformer des termes en d'autres termes du même type, se pose des questions pointues sur la notion d'égalité, et construisent des types à partir des termes. Ces derniers sont appelés types dépendants et sont extrêmement utiles lorsqu'il s'agit de formaliser les mathématiques dans des assistants à la preuve comme Coq ou Lean. La théorie homotopique des types intègre dans les types et les termes la notion de chemin entre deux objets, relâchant la notion d'égalité [13], et facilitant la formalisation de la théorie de l'homotopie.

Objectifs de la thèse et méthodologie

Tous ces travaux indiquent l'existence de lien fertiles entre les structures issues de l'étude théorique des langages de programmation, et celles issues des mathématique. Cette thèse se propose d'étendre la logique linéaire différentielle vers la théorie des types, et a pour ligne de mire le développement d'outils logiques pour la formalisation de l'analyse

Modèle Catégoriques de la logique linéaire différentielle La théorie des catégorie est souvent un cadre nécessaire à l'interprétation mathématiques des idées logiques, et réciproquement. Pourtant, les modèles catégoriques de la logique linéaire différentielle en termes de catégories différentielles [**?**] ne traitent pas bien la nature classique de la logique linéaire différentielle, ni la symétrie entre la déréliction de la logique linéaire et la co-déréliction de la logique linéaire différentielle. La principale difficulté à trouver un modèle élégant pour la logique linéaire différentielle est due au fait que la différentiation n'est pas un foncteurL̇'exploration de la nature fonctorielle de la différenciation est la première étape nécessaire pour intégrer les règles de la logique linéaire différentielle dans les constructions de la théorie des types. En collaboration avec Morgan Rogers et Valentin Maestracci, Marie Kerjean a récemment démontré que la différentiation s'exprimait en terme de "co-slice" catégories [8]. Ces catégories sont en fait très liées à la fois aux modèles des types dépendants [4]. Jad Koleilat étant très intéressé par la théorie des catégories, il pourra utiliser cette nouvelle axiomatisation pour relier catégoriquement types dépendants et différentiation. Cela sera une première approche pour l'écriture d'une théorie des types intégrant des principes de différentiation et des preuves. On s'appuiera sur des travaux existants mélangeant types linéaires et dépendants [11, 1]. On conjecture que la différentiation permet de passer de notions extensionnelles de théorie des types à des notions intentionnelles : cela pourra être testé sur les notions d'égalités.

Différentiation et Axiome du Choix La traduction de Gödel de Dialectica, portant historiquement sur la logique intuitionniste, se comprend d'une manière moderne comme une traduction sur λ-calcul [12]. Cette traduction sert à réaliser des axiomes de logique classique à partir de la logique intuitionniste, ainsi qu'à obtenir des résultats mathématiques quantitatifs à partir de résultats d'existence [10]. La deuxième étape de cette thèse consistera à pousser plus loin l'analogie entre Dialectica et Différentiation, en s'attaquant à la bar induction. Cette notion de preuve mathématique est ce qui sert à donner une interprétation de Dialectica de l'axiome du choix, et c'est un sujet dont le candidat Jad Koleilat est déjà spécialiste via son stage de master et la publication qui en résulte [7]. Il y a de grandes similarités entre l'explication de la bar induction et la formule de Taylor : toutes deux reposent sur une notion d'approximation, la première parlant des preuves et la deuxième des programmes. Jad Koleilat pourra pendant sa thèse comparer formellement ces deux constructions.

Un langage pour formaliser les preuves d'analyse fonctionnelles Le développement des deux objectifs précédents, ou même d'un seul, permettra le développement d'outils pour faciliter la formalisation de l'analyse fonctionnelle. Marie Kerjean a de l'expérience dans la formalisation dans l'assistant à la preuve Coq et la bibliothèque Mathematical-Components. Jad Koleilat a de l'expérience dans l'usage de l'assistant à la preuve Lean et dans Agda. En lien avec le deuxième objectif, il n'est pas déraisonnable d'espérer que cela permette l'automatisation de certains procédés de proof-mining. Le proof-mining est l'utilisation moderne de Dialectica, pendant laquelle des logiciens extraient des preuves quantitatives et améliorées de preuve existentielle, typiquement en analyse. En lien avec le premier objectif, on peut imaginer que une théorie des types différentielles, intégrant les principes de raisonement de la logique linéaire différentielle, facilite la formalisation de l'analyse comme la théorie homotopique des types facilite la formalisation de la théorie de l'homotopie.

Références

[1] Robert Atkey. Polynomial time and dependent types. *Proc. ACM Program. Lang.*, (POPL), 2024.

[2] Davide Barbarossa and Giulio Manzonetto. Taylor subsumes Scott, Berry, Kahn and Plotkin. *Proc. ACM Program. Lang.*, 4(POPL) :1 :1–1 :23, 2020.

[3] Aloïs Brunel, Damiano Mazza, and Michele Pagani. Backpropagation in the Simply Typed Lambda-calculus with Linear Negation. *POPL*, 2020.

[4] Pierre-Louis Curien, Richard Garner, and Martin Hofmann. Revisiting the categorical interpretation of dependent type theory. *Theoretical Computer Science*, 546, 2014.

[5] Thomas Ehrhard. An introduction to differential linear logic : proof-nets, models and antiderivatives. *Mathematical Structures in Computer Science*, 28(7) :995–1060, 2018.

[6] Jean-Yves Girard. Linear logic. *Theoretical Computer Science*, 50(1) :1–101, 1987.

[7] Hugo Herbelin and Jad Koleilat. On the logical structure of some maximality and well-foundedness principles. In *FSCD*, 2024.

[8] Marie Kerjean, Valentin Maestracci, and Morgan Rogers. Functorial Models of Differential Linear Logic. preprint, 2023.

[9] Marie Kerjean and Pierre-Marie Pédrot. δ is for dialectica. In *LICS*, 2024.

[10] Ulrich Kohlenbach. *Applied Proof Theory - Proof Interpretations and their Use in Mathematics*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, 2008.

[11] Neelakantan R. Krishnaswami, Pierre Pradic, and Nick Benton. Integrating linear and dependent types. In *Proceedings of the 42nd Annual ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages*, POPL '15.

[12] Pierre-Marie Pédrot. A functional functional interpretation. In *CSL-LICS '14*, 2014.

[13] The Univalent Foundations Program. *Homotopy Type Theory : Univalent Foundations of Mathematics*. Institute for Advanced Study, 2013.