

Sujet de thèse

Optimisation combinatoire pour la prise de décision multi-objectif

Contexte

Ce sujet a pour ambition de lier des concepts existants en théorie de la décision et optimisation combinatoire en présence de critères multiples. La théorie de la décision est un domaine des sciences sociales étudiant comment des groupes d'individus peuvent choisir une solution commune, ou comment un individu peut faire un choix face à des critères différents. Un exemple classique est de trouver un chemin réalisant un bon compromis entre la longueur de son trajet et le coût induit (par exemple le prix d'un péage). Un autre exemple classique est de déterminer une affectation de ressources qui réalise un compromis entre les souhaits de plusieurs personnes: par exemple choisir des attributions de budget au sein d'une assemblée représentative.

Contrairement à l'optimisation mono-objectif discrète où il existe (ou non) des solutions optimales, optimiser en considérant plusieurs objectifs demande de définir quelles sont les solutions qui répondent aux attentes de ce problème. Cette question a été largement abordée au travers de plusieurs concepts existants dans des communautés différentes en théorie de la décision. Nous nous intéresserons à **l'optimisation multiobjectif** qui est souvent synonyme d'énumération de toutes les solutions non-dominées au sens de Pareto. Un optimum de Pareto est une prise de décision pour laquelle il n'existe pas une alternative dans laquelle tous les acteurs seraient dans une meilleure position. Bien que théoriquement de taille exponentielle, le front de Pareto peut être énuméré en pratique dans des contextes appliqués où l'on connaît à l'avance des intervalles réduits acceptables sur les objectifs.

Ainsi cette thèse abordera l'étude des propriétés structurelles de ces problèmes ainsi que leur résolution via des techniques d'optimisation combinatoire.

Etude des propriétés structurelles par les approches polyédrales

Une étude de la structure des polyèdres intervenants en optimisation multi-objectif permettrait de mieux comprendre les rapports entre l'espace des solutions et celui des critères. En particulier, dans le polyèdre combinant les espaces des solutions et celui des critères, la projection d'une facette dans l'espace des objectifs est un polytope dont le dominant décrit des inégalités valides pour l'espace des objectifs. Il est intéressant de déduire comment générer des inégalités de renforcements efficaces dans un tel contexte.

Un sujet complémentaire et fortement lié à l'optimisation multi-objectif est la décision multicritère qui désigne souvent la détermination d'une solution réalisant un compromis entre les différents critères. De telles solutions sont intéressantes à produire pour affiner la prise de décision en optimisation multi-objectif. En effet, cela permet au décideur de voir les solutions les plus équitables au sein des possibles. De tels compromis peuvent alors posséder de bonnes propriétés pour respecter par exemple une certaine équité entre les personnes. Une technique très étudiée est de ramener ces problématiques à des problèmes monocritères via l'utilisation de fonctions d'agrégation comme la fonction OWA (Ordered Weighted Averaging). Une telle fonction a de très bonnes propriétés mais rend les problèmes combinatoires difficiles à résoudre: par exemple le problème largement polynomial d'affectation biparti devient NP-difficile sous l'objectif OWA. Il est intéressant de regarder ces problèmes sous l'angle de la programmation linéaire et éventuellement non-linéaire afin de résoudre des instances de plus grandes tailles par les approches polyédrales et les approches par décomposition[4].

Techniques de résolution

Déterminer un tel ensemble de solutions nécessite une exploration par algorithme de branchement de l'espace de solutions en le croisant avec l'espace des objectifs. Des résultats issus de la théorie de la décision proposent une généralisation de l'élagage classique dans les arbres de branchement depuis le mono vers le multiobjectif. Les valeurs bornantes supérieures et inférieures sont remplacées par des ensembles bornants. Les performances d'un algorithme de branchement multiobjectif reposent ainsi sur la réduction de la taille de ces ensembles. La thèse abordera le renforcement des ces algorithmes de branchement en étudiant les polyèdres associés sous différents aspects: en effet, plusieurs combinatoires sont concernées:

- une première approche est celle de l'étude des liens entre espace de solutions et espace des objectifs/critères dans le but de fournir des inégalités valides pour obtenir de meilleures bornes lors de l'exploration. Cette approche, bien que classique, n'a pas été approfondie dans la littérature [5, 1].
- une autre approche (moins classique) concerne la combinatoire associée à la dominance entre solutions. En effet, une telle dominance a été récemment traduite par des inégalités linéaires en cas monobjectif [2]. L'idée est ici d'étendre ce concept au cas multiobjectif.

D'autres approches sont également à considérer comme des techniques de décomposition. Il est aussi très intéressant d'étendre ces résultats à des objectifs linéaires ou non-linéaires.

La mise en œuvre informatique pourra être intégrée au sein du projet VoptSolver [6] qui propose un cadre de logiciel libre pour la résolution de programmes linéaires multi-objectifs. Les algorithmes et les inégalités proposées par ces travaux pourront ainsi être testés dans le contexte de cet outil sur des bases d'instances utilisées par la communauté scientifique. Cet aspect mise en œuvre intègre des collaborations en cours avec le laboratoire LS2N de Nantes et le département de Management Science de la Management School de Lancaster au Royaume-Uni.

Encadrement

Co-directeur: Pierre Fouilhoux, PR, LIPN

Co-directeur: Lucas Létocart, MCF-HDR, LIPN

Les deux co-directeurs ont des compétences complémentaires en optimisation mathématique, notamment autour des approches polyédrales et des méthodes de décomposition, avec des applications en théorie de la décision multicritère et de l'optimisation multiobjectif. Pierre Fouilhoux est co-directeur (50%) d'une allocation doctorale de l'Université Sorbonne Paris Nord obtenue en 2020. Lucas Létocart n'est directeur ou co-directeur d'aucune allocation doctorale de l'Université Sorbonne Paris Nord obtenue depuis les trois dernières années.

Bibliographie :

- [1] Cerqueus A. Bi-objective branch-and-cut algorithms applied to the binary knapsack problem : surrogate bound sets, dynamic branching strategies, generation and exploitation of cover inequalities. *Rapport de thèse*, 2015.
- [2] Falq A-E, Fouilhoux P. and Kedad-Sidhoum S., Linear inequalities for neighborhood based dominance properties for the common due-date scheduling problem *European Journal of Operational Research*, 296:2(453-464), 2022.
- [3] Fouilhoux P., Spanjaard O. Une nouvelle linéarisation de la moyenne ordonnée pondérée pour l'optimisation équitable *Conférence ROADEF*, 2012.
- [4] Létocart L., Nagih A., Touati Moun gla N. Dantzig-Wolfe and Lagrangian decompositions in integer linear programming *International Journal of Mathematics in Operational Research*, 4:3(247-262), 2012.
- [5] Przybylski A., Gandibleux X. Multi-objective branch and bound. *European Journal of Operational Research* 260:3(856-872), 2017.
- [6] VoptSolver project <https://github.com/vOptSolver>