Nicolas de Saxcé
CNRS – Université Sorbonne Paris Nord
Institut Galilée
99, avenue Jean-Baptiste Clément
93430 Villetateuse

Le 26 avril 2022

Proposition de sujet de thèse :

Approximation diophantienne sur les variétés de drapeaux

Dès la découverte des nombres irrationnels par les Grecs, autour du Vème siècle avant J.-C., s'est posé le problème de l'approximation de ces nombres par des nombres rationnels, plus facilement descriptibles et utilisables dans les calculs. Par exemple, pour le nombre π, les premières approximations remarquables sont 3, puis $\frac{22}{7} = 3.1428...$, souvent attribuée à Archimède, puis $\frac{355}{113} = 3.1415929...$, etc. Toutes ces fractions permettent d'approcher π avec précision, en comparaison des petits dénominateurs utilisés ; en particulier, l'inégalité $\left|\pi - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$ est toujours satisfaite, ce qui montre que l'approximation est bien plus efficace que celle obtenue à l'aide du développement décimal tronqué au rang n, pour laquelle l'erreur est seulement majorée par $\frac{1}{q} = \frac{1}{10^n}$.

L'approximation diophantienne a pour objet l'étude de telles approximations rationnelles de points réels. Lorsque le point x qu'on cherche à approcher est choisi aléatoirement, on parle souvent d'approximation diophantienne *métrique*. Dans ce domaine, un résultat central dû à Khintchine [6] assure que si $\psi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une fonction décroissante telle que $\sum_{q=1}^{\infty} \psi(q) < +\infty$ (resp. $\sum_{q=1}^{\infty} \psi(q) = +\infty$), alors pour presque tout x dans $\mathbb{R}$, l'inégalité $\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{\psi(q)}{q}$ n'admet qu'un nombre fini (resp. admet une infinité) de solutions $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. En dehors de certaines obstructions bien particulières, lorsque x est choisi parmi les nombres « classiques » — π, $\sqrt[3]{2}$, $\log 3$, etc. — on s'attend à un comportement qui s'apparente à celui d'un nombre générique, mais cela est souvent difficile à démontrer. Rappelons toutefois le théorème de Roth [10] donne une version faible de l'énoncé de Khintchine, lorsque x est un nombre algébrique irrationnel : l'inégalité $\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{\beta}}$ admet une infinité de solutions si et seulement si $\beta \leq 2$.

À l'origine l'approximation diophantienne traite surtout de l'approximation de points de $\mathbb{R}$, ou de l'espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, par des points rationnels. Mais, plus généralement, étant donnée une variété algébrique X dans laquelle les points rationnels sont denses et un point réel $x \in X(\mathbb{R})$, il est naturel de chercher à comprendre la qualité des approximations de x par des points dans $X(\mathbb{Q})$. Ce champ d'étude, suggéré par Lang [9] dès 1965 et encore assez peu exploité, semble avoir suscité un net regain d'intérêt ces dernières années. Ainsi, Ghosh, Gorodnik et Nevo [5] se sont appliqués à déterminer certains exposants diophantiens dans les variétés homogènes de groupes de Lie semi-simples, tandis que Das, Fishman, Kleinbock et Simmons [4] ont étudié le cas où X est une hypersurface quadrique, et établi dans ce cadre des analogues des résultats classiques de l'approximation diophantienne. Dans ces travaux, les auteurs s'appuient largement sur les méthodes de la dynamique homogène développées en particulier par Margulis et ses collaborateurs [1, 7, 8], et nous avons montré dans un mémoire récent [2] que ces méthodes s'appliquaient naturellement pour établir une théorie de l'approximation diophantienne dans les variétés de drapeaux, dont les exemples les plus simples sont les espaces projectifs, les quadriques projectives, et les variétés grassmanniennes. Cependant, de nombreux résultats classiques n'ont pas encore d'analogue dans cette théorie générale.

Dans cette thèse, on s'intéressera donc au comptage de certaines approximations rationnelles de points réels sur une variété de drapeaux X. En particulier, dans le cadre métrique, on cherchera à établir un analogue d'un résultat dû à Schmidt [11, Theorem 3B, page 61], qui donne un équivalent asymptotique du nombre de points rationnels de hauteur bornée dont la distance à un point x est majorée à l'aide d'une fonction ψ, comme dans le théorème de Khintchine.

Rappelons qu'une variété de drapeaux X est une variété algébrique qui peut s'obtenir comme quotient $X \simeq P\backslash G$ d'un groupe algébrique rationnel semi-simple G par un sous-groupe parabolique P. Les points rationnels sur X forment une union finie d'orbites sous l'action d'un sous-groupe arithmétique $\Gamma = G(\mathbb{Z})$ dans G. Les problèmes d'approximation diophantienne sur X peuvent alors se reformuler en termes de certaines orbites diagonales dans l'espace de réseaux $\Omega = G/\Gamma$. La première étape en direction d'une version du théorème de Schmidt dans ce cadre général serait d'obtenir une démonstration du théorème de Schmidt classique à l'aide des outils de la dynamique homogène, et notamment du mélange exponentiel [3] dans l'espace des réseaux. Il faudrait ensuite voir comment adapter cette démonstration pour qu'elle soit valable pour une variété de drapeaux quelconque. S'il est trop difficile de traiter directement le cas général, on pourra commencer par des cas particuliers plus simples — quadriques projectives, variétés grassmanniennes — où des calculs plus explicites sont envisageables, et pour lesquels le résultat serait déjà nouveau.

Références

[1] S. G. Dani. Divergent trajectories of flows on homogeneous spaces and diophantine approximation. *J. Reine Angew. Math.*, 359 :55-89, 1985.

[2] N. de Saxcé. Groupes arithmétiques et approximation diophantienne. manuscrit disponible à l'adresse `https://www.math.univ-paris13.fr/~desaxce/`, 2020.

[3] M. Einsiedler, G. Margulis, A. Mohammadi et A. Venkatesh. Effective equidistribution and property (τ). *J. Am. Math. Soc.*, 33(1) :223-289, 2020.

[4] Fishman, Kleinbock, Merrill et Simmons. Intrinsic diophantine approximation on quadric hypersurfaces. *preprint arXiv :1405.7650v5*, 2014.

[5] Anish Ghosh, Alexander Gorodnik et Amos Nevo. Metric Diophantine approximation on homogeneous varieties. *Compos. Math.*, 150(8) :1435-1456, 2014.

[6] A. Khintchine. Zur metrischen Theorie der diophantischen Approximationen. *Mathematische Zeitschrift*, 24 :706-714, 1, 1926.

[7] D. Y. Kleinbock et G. A. Margulis. Flows on homogeneous spaces and diophantine approximation on manifolds. *Ann. of Math. (2)*, 148(1) :339-360, 1998.

[8] D. Y. Kleinbock et G. A. Margulis. Logarithm laws for flows on homogeneous spaces. *Invent. Math.*, 138(3) :451-494, 1999.

[9] Serge Lang. Report on Diophantine approximations. *Bull. Soc. Math. Fr.*, 93 :177-192, 1965.

[10] Klaus F. Roth. Rational approximations to algebraic numbers. Proc. Int. Congr. Math. 1958, 203-210 (1960). 1960.

[11] Wolfgang M. Schmidt. *Diophantine approximation.* Tome 785. Springer, Cham, 1980.