UNIVERSITÉ PARIS 13
Institut Galilée
99, Avenue Jean-Baptiste Clément
93430 Villetaneuse, France

Bruno VALLETTE

PROFESSEUR
Laboratoire Analyse, Géométrie et Applications

✉ `vallette@math.univ-paris13.fr`

Paris, le 4 mai 2019

Proposition de sujet de thèse

THÉORIE DE LA DÉFORMATION ET HOMOTOPIE RATIONNELLE

La *théorie de la déformation* étudie les structures d'un type donné sur un espace sous-jacent donné. En caractéristique 0, son principe fondateur, conjecturé par Deligne et Grothendieck et montré récemment par Pridham et Lurie, veut qu'il existe une algèbre de Lie différentielle graduée dont les solutions de l'équation de Maurer–Cartan correspondent aux structures recherchées. Pour étudier de manière topologique l'ensemble de ces solutions (espace de Maurer–Cartan), il faut considérer des algèbres de Lie munies d'une bonne topologie complète. Cette notion remonte à la thèse de Lazard (1954) et fournit un bon cadre formel pour les formules apparaissant dans la théorie de Lie. La notion d'*algèbre de Lie différentielle graduée complète* est plus nouvelle ; elle apparait dans les travaux fondateurs de Quillen et Sullivan en homotopie rationnelle. Cette théorie repose sur des adjonctions entre plusieurs catégories qui décrivent conceptuellement les liens entre les groupes d'homotopie (structure d'algèbre de Lie) et les groupes d'homologie (structure de cogèbre cocommutative) des espaces *pointés et simplement connexes* dont les modèles combinatoires sont les complexes de Kan (ensembles simpliciaux). Le but de cette thèse sera d'étudier les problèmes suivants dans ce contexte.

OBJECTIF 1: Généraliser la construction des espaces de Maurer–Cartan aux algèbres de Lie (à homotopie près) complètes *à courbure*. Ces dernières ne sont plus des objects différentiels gradués : la présence de la courbure (élément de degrée -2) est une obstruction à l'équation $\mathrm{d}^2 = 0$. Pour pallier cette difficulté, on pourra utiliser la méthode due à Kan qui permet de construire des paires de foncteurs adjoints depuis les ensembles simpliciaux à l'aide d'objets cosimpliciaux. La construction du bon objet cosimplicial doit se faire ici en utilisant la démonstration de la version simpliciale du théorème de De Rham donnée par Dupont ainsi que le théorème de transfert de l'algèbre homotopique. Un exemple fondamental de problème de déformation impliquant des algèbres à courbure est la définition de la cohomologie de Floer introduite par Fukaya, Ohno, Otta et Oh.

OBJECTIF 2: L'étude précédente devrait mettre au jour une autre paire de foncteurs adjoints entre la catégorie des algèbres de Lie (à homotopie près) complètes à courbure et la catégorie des cogèbres cocommutatives counitaires. Ceci doit pouvoir être décrit conceptuellement par la dualité de Koszul des opérades correspondantes. Au final, cela fournira des adjonctions entre trois catégories : les deux précédentes et celle des ensembles simpliciaux.

OBJECTIF 3: L'étude précédente doit donc pouvoir permettre de faire de l'homotopie rationnelle *en toute généralité*, c'est-à-dire pour tout espace non-nécessairement pointé et non-nécessairement simplement connexe. Pour cela, il faudra considérer la structure de modèles des cogèbres cocommutatives counitaires (à homotopie près) où les équivalences faibles sont les quasi-isomorphismes. Chose nouvelle, il faudra munir la catégorie des algèbres de Lie (à homotopie près) complètes à courbure d'une toute nouvelle structure de modèles, très probablement transférée depuis la structure de modèles rationnelle cofibrement engendrée des ensembles simpliciaux. Au final, on conjecture que les différentes adjonctions sont des équivalences de Quillen pour ces structures de modèles.