Projet de thèse avec Sébastien Tran Tien

Équation d'agrégation et équations de type Keller-Segel.

Directeur de thèse : Nicolas Vauchelet (Université Paris 13)
Contact : `vauchelet@math.univ-paris13.fr`
en collaboration avec Frédéric Lagoutière (Université Lyon 1)

1 Contexte

Il y a quelques années, en collaboration avec José Antonio Carrillo, François James et Frédéric Lagoutière, nous nous sommes intéressés à l'analyse d'une équation d'agrégation (voir [2]). Il s'agit d'une équation non linéaire de transport, dont la vitesse est une fonction non locale de l'inconnue et n'est pas régulière, obtenue par convolution de la solution avec le gradient d'un potentiel W, lipschitzien, de classe $C^1(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$, λ-concave et symétrique (typiquement, $W(x) = \|x\|_2$) :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot a\rho = 0, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^d, \\ a(t,x) = -\nabla W * \rho(t)(x), \\ \rho(0) = \rho^0 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d), \end{cases} \tag{1.1}$$

($\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ est l'ensemble des mesures de probabilité admettant un second moment fini sur $\mathbb{R}^d$). Le caractère bien posé de cette équation avait été montré dans un cadre de flots de gradients (dans l'espace de Wasserstein W_2) par Carrillo, Di Francesco, Figalli, Laurent et Slepčev dans [1]. Nous avons montré le caractère bien posé au sens des distributions dans un cadre et avec des outils plus classiques pour les équations aux dérivées partielles, en utilisant le flot de Filippov ([4]) et des résultats de Poupaud et Rascle ([7]). Dans ce cadre la solution est obtenue comme la mesure image de la donnée initiale par le flot de Filippov (qui dépend lui-même de la solution car l'équation est non linéaire). Précisément, nous avons montré l'existence et l'unicité de solution au sens des distributions du problème de Cauchy, et montré que la mesure de probabilité solution s'exprime $\rho(t) = X(t)\#\rho^0$ où X est le flot associé au champ a (flot qui entre dans le cadre de Filippov et non de Cauchy-Lipschitz car il est génériquement discontinu).

Un des intérêts de notre approche réside dans le fait que nous n'avons pas besoin du cadre de flot de gradient, et que donc nous sommes en mesure d'étendre les résultats à des cas où le champ de vitesses n'est pas un gradient (comme dans [6]). Un autre intérêt est que c'est un cadre classique des équations de transport, qui autorise l'utilisation d'algorithmes de calcul approché habituels pour les équations aux dérivées partielles, et simples. Avec François Delarue et Frédéric Lagoutière, dans [3], nous avons montré des estimations d'erreur (en distance de Wasserstein) pour le schéma décentré amont (upwind).

C'est la suite de ces travaux que je propose de mener avec Sébastien Tran Tien. Cette suite comporte plusieurs axes que je pense tous à la fois très intéressants et difficiles.

2 Ajout de la diffusion et asymptotique non visqueuse

Une première extension, naturelle, est de considérer, avec des potentiels ayant la même régularité que ci-dessus (potentiels dits « pointy »), le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot a\rho = \nu \Delta \rho, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^d, \\ a(t,x) = -\nabla W * \rho(t)(x), \\ \rho(0) = \rho^0 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d). \end{cases} \tag{2.1}$$

Ce problème est bien connu, et son analyse est déjà faite (avec des outils classiques car les solutions sont régulières), mais l'asymptotique des solutions lorsque ν tend vers 0 semble manquante. Les deux cadres non visqueux connus (celui de Carrillo, Di Francesco, Figalli, Laurent et Slepčev, et le nôtre) paraissent un bon moyen de régler cette question :

— dans le cadre flot de gradient, il s'agirait d'écrire l'équation aux dérivées partielles de transport-diffusion comme un flot de gradient dans $W_2(\mathbb{R}^d)$: ceci est possible car l'équation de la chaleur aussi s'écrit de cette manière ;

— dans le cadre des flots de Filippov, le meilleur moyen me semble aujourd'hui de considérer le laplacien comme le résultat d'un Brownien ; il faudrait alors considérer un flot stochastique avec un champ de transport déterministe (drift) discontinu et un processus brownien.

L'analyse numérique de cette équation avec diffusion est, elle aussi, un champ d'étude relativement nouveau.

3 Potentiels moins réguliers (avec ou sans diffusion)

Dans le domaine des équations d'agrégation, l'équation de Keller-Segel, qui consiste en (2.1) mais avec un potentiel $W = \ln(\|x\|)$, constitue une gageure. Il est connu que, contrairement au cas où le potentiel est pointu, la solution peut développer des singularités en temps fini. L'apparition de ces singularités est conditionnée à la présence initiale d'une masse totale suffisante (pour un coefficient de viscosité donné). Ce domaine est bien étudié et documenté ; en revanche, la forme que ces singularités peuvent prendre l'est moins, malgré certains travaux très intéressants dans lesquels des ansatz sont faits et analysés (dans ces articles, les singularités considérées sont constituées de masses de Dirac associées à des profils singuliers). Hélas, l'approche par flot de Filippov ne s'applique pas directement : dans le cas $\nu = 0$, il faudrait pour cela être capable d'étudier des problèmes de Cauchy du type $x'(t) = -1/x(t)$, ce qui n'entre pas dans le cadre de Filippov à cause de la non-bornitude du champ. Il s'agit donc d'un problème très difficile, dont pourtant la solution semble évidente, au moins en dimension 1 : la solution à $x'(t) = -1/x(t)$ associée à $x(0) = x^0$ est $x(t) = \sqrt{({x^0}^2 - t/2)^+}$ où $(\cdot)^+$ désigne la partie positive. Un des objectifs de la thèse serait de comprendre ce type d'équations et de les étudier, avec leur application à l'équation de Keller-Segel.

Du point de vue de l'approximation numérique aussi, ce problème est très intéressant, notamment en ce qui concerne le seuil de masse initiale qui conditionne l'apparition des singularités, et leur approximation par un schéma.

4 Potentiels « pointy » avec diffusion fractionnaire

Un problème peut-être un peu plus facile que le précédent consiste en l'analyse de (2.1) avec un potentiel pointu mais avec un opérateur de diffusion fractionnaire au second membre :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot a\rho = \nu \Delta^{\alpha/2}\rho, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^d, \\ a(t,x) = -\nabla W * \rho(t)(x), \\ \rho(0) = \rho^0. \end{cases} \tag{4.1}$$

Pour cette équation, le phénomène de seuil de masse initiale pour l'apparition de singularités est connu aussi, mais la relative régularité du potentiel autorise l'étude du flot dans la théorie de Filippov. On peut donc espérer étudier ce problème à l'aide d'un flot stochastique où le champ sera composé d'une vitesse discontinue mais lipschitzienne à droite et d'un processus de Lévy. Un article récent, proposant des avancées notables sur le sujet, est [5]

Là encore, le développement de schémas numériques et leur analyse peut être un sujet passionnant.

Bibliographie :

[1] J.A. Carrillo, M. DiFrancesco, A. Figalli, T. Laurent, D. Slepčev, *Global-in-time weak measure solutions and finite-time aggregation for nonlocal interaction equations*, Duke Math. J. **156** (2011), 229–271.

[2] J.A. Carrillo, F. James, F. Lagoutière, N. Vauchelet, *The Filippov characteristic flow for the aggregation equation with mildly singular potentials*, J. Differential Equations. **260** (2016), no 1, 304–338.

[3] F. Delarue, F. Lagoutière, N. Vauchelet, *Convergence order of upwind type schemes for nonlinear aggregation equation with pointy potential*, à paraître aux Annales Henri Lebesgue.

[4] A.F. Filippov, *Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Side*, A.M.S. Transl. (2) **42** (1964), 199–231.

[5] L. Laflèche, S. Salem, *p-Laplacian Keller-Segel equation : fair competition and diffusion-dominated cases*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris 357 (2019), no. 4, 360–365.

[6] F. Lagoutière, N. Vauchelet, *Analysis and simulation of nonlinear and nonlocal transport equations*, Innovative algorithms and analysis, 265–288, Springer INdAM Ser., 16, Springer, Cham, 2017.

[7] F. Poupaud, M. Rascle, *Measure solutions to the linear multidimensional transport equation with discontinuous coefficients*, Comm. Partial Diff. Equ., **22** (1997), 337–358.