

SUJET DE THÈSE
Allocation doctorale 2019 - École doctorale Galilée

Titre du sujet : Localisation d'Anderson et statistiques spectrales pour le modèle de scattering zipper aléatoire.

Laboratoire de rattachement : LAGA - Institut Galilée - Université Paris 13.

Directeur de thèse : Hatem ZAAG. Université Paris 13, Institut Galilée, Laga. Email: Hatem.Zaag@univ-paris13.fr	Co-encadrant : Hakim BOUMAZA. Université Paris 13, Institut Galilée, Laga. Email: boumaza@math.univ-paris13.fr
--	---

1. PRÉSENTATION DU DOMAINE

Dans un cristal idéal, composé d'atomes rangés sur un réseau périodique, un électron peut se déplacer sans rencontrer d'obstacle. Toutefois, dans la nature, les cristaux idéaux n'existent pas, ils contiennent toujours des défauts qui modifient les propriétés physiques du cristal et en particulier peuvent avoir un impact sur le transport électronique.

Pour modéliser les effets du désordre sur le comportement quantique des électrons dans un cristal imparfait on peut introduire des termes aléatoires dans l'équation de Schrödinger, équation qui régit le comportement quantique des électrons dans le cristal. Alors, deux nouveaux phénomènes apparaissent : la localisation d'Anderson et la transition d'Anderson pour les cristaux tridimensionnels. Le phénomène de localisation d'Anderson correspond au fait qu'au-delà d'une certaine quantité de désordre dans le cristal, l'électron va cesser de s'y déplacer librement et va rester confiné dans une région localisée. Le cristal cesse d'être un conducteur pour devenir un isolant. Ce phénomène de localisation d'Anderson doit alors être pris en compte, par exemple, dans la conception des batteries pour les appareils qui sont utilisés en conditions extrêmes (téléphones satellites, engins spatiaux...).

Le phénomène de localisation dépasse le cadre de la mécanique quantique. On peut l'observer dans d'autres situations où une onde se propage dans un milieu désordonné. Cela peut être le cas d'une onde lumineuse, de micro-ondes ou d'ondes acoustiques. Par exemple, dans la conception des fibres optiques, il faut trouver des moyens de le contourner, ce qui peut se faire grâce à des guides d'ondes.

Du point de vue mathématique, la localisation d'Anderson est à présent un phénomène relativement bien compris. Celle-ci est démontrée en dimension 1 pour les modèles d'Anderson discrets ou continus, qu'ils soient à valeurs scalaires ou matricielles [B1, GM]. En dimension supérieure, elle n'est démontrée que pour des énergies au bas du spectre. Pour les autres énergies sa démonstration en dimension 2 ainsi que l'existence d'une transition localisation/délocalisation en dimension 3 restent des problèmes ouverts. La localisation d'Anderson est aussi démontrée pour certains modèles unitaires comme celui de Chalker-Coddington [ABJ] ou la version unitaire du modèle d'Anderson introduite en dimension 1 dans [HJS].

Un scattering zipper est un système obtenu par concaténation de systèmes élémentaires de diffusion unitaire. Ce modèle a été introduit par L. Marin et H. Schulz-Blades

([MS]), puis une version aléatoire de ce modèle a été introduite par H. Boumaza et L. Marin ([BM]). Il généralise plusieurs modèles de diffusion unitaire dont celui de Chalker-Coddington qui modélise l'effet Hall quantique ou celui de Brown-Blatter qui modélise l'effet tunnel de Zener [BB]. Cet effet est à la base de la conception des diodes Zener qui ont de nombreuses applications en électronique : régulateurs de Zener qui permettent d'obtenir une tension électrique constante, améliorations des sources de puissance ou encore pour concevoir des limiteurs de tension.

2. OBJECTIFS DE LA THÈSE

2.1. Résultats de localisation d'Anderson. Dans le cas du scattering zipper aléatoire, les exposants de Lyapunov sont tous distincts et strictement positifs, il y a donc absence de diffusion pour le scattering zipper aléatoire. Ces résultats sont un signe fort de la présence du phénomène de localisation d'Anderson.

Toutefois, les méthodes connues dans le cas d'opérateurs unitaires comme celles de [ABJ], ne s'adaptent pas directement au cas du scattering zipper aléatoire. Une première difficulté à surmonter est d'obtenir une formule de Thouless reliant les exposants de Lyapunov à la densité d'états. La structure par blocs de taille arbitraire dans le scattering zipper rend complexe le décompte des valeurs propres et donc l'estimation de la densité d'états intégrée, dont l'existence même n'est pas démontrée pour le scattering zipper. L'estimée de Wegner qui est au coeur de l'analyse multi-échelle, méthode permettant d'obtenir la localisation d'Anderson, est elle aussi complètement inconnue dans le cadre des opérateurs unitaires à valeurs matricielles. Ce sont principalement ces deux points qui font de la localisation d'Anderson pour le scattering zipper aléatoire un problème ouvert et difficile.

2.2. Résultats sur les statistiques spectrales. Une question naturelle qui se pose après avoir prouvé la localisation d'Anderson est celle de la répartition statistique des valeurs propres généralisées dans la région de localisation, là où il n'y a que du spectre purement ponctuel.

Plus précisément, si on considère la restriction de l'opérateur étudié à un interval borné, le spectre de cette restriction consiste en des valeurs propres. Dans le cas des modèles d'Anderson auto-adjoints, on peut démontrer que dans un petit voisinage d'une énergie de référence où il y a localisation, lorsque la longueur de l'intervalle tend vers l'infini, les valeurs propres renormalisées sont distribuées suivant une loi de Poisson.

Dans le cas du scattering zipper aléatoire, rien n'est connu au sujet des statistiques spectrales. Il faudra donc dans un premier temps étudier dans quel mesure les techniques de [GK] peuvent s'adapter au cadre unitaire. Puis, une première étape sera d'explorer numériquement la loi asymptotique des valeurs propres renormalisées. Cela permettra de faire une conjecture sur cette loi dont pour le moment nous ne savons rien.

REFERENCES

- [ABJ] J. Asch, O. Bourget, A. Joye, *Localization Properties of the Chalker-Coddington Model*, Annales H. Poincaré **7**, 1341-1373 (2010).
- [BB] G. Blatter, D. A. Browne, *Zener tunneling and localization in small conducting rings*, Phys. Rev. **B 37**, 3856-3880 (1988).
- [B1] H. Boumaza, *Localization for a matrix-valued Anderson model*, Math. Phys. Anal. Geom. **12**, 255-286 (2009).
- [BM] H. Boumaza, L. Marin, *Absence of absolutely continuous spectrum for random scattering zippers*, J. Math. Phys. **56**, 022701 (2015), DOI:10.1063/1.4906809.

- [GK] F. Germinet, F. Klopp, *Spectral statistics for random Schrödinger operators in the localized regime*, J. Eur. Math. Soc., **16**(3), 1967-2031 (2014).
- [GM] I.Ya. Goldsheid, G.A. Margulis, *Lyapunov indices of a product of random matrices*, Russian Math. Survey **44**(5), 11-71 (1989).
- [HJS] E. Hamza, A. Joye, G. Stolz, *Dynamical localization for unitary Anderson models*, Math. Phys. Anal. Geom. **12**, 381-444 (2009).
- [MS] L. Marin, H. Schulz-Baldes, *Scattering Zippers and their spectral Theory*, J. Spect. Theory, **3**, 47-82 (2013).