Projet de thèse de Bui Quang-Tu

Titre : Décompositions en symboles et filtrations en cohomologie galoisienne

I. Contexte

Le présent projet s'articule dans le cadre de la cohomologie des groupes Galoisienne, c'est à dire la cohomologie des groupes de Galois absolus. C'est un domaine central de l'algèbre, de l'arithmétique et de la théorie de Galois inverse à l'origine d'invariants subtils tel que le groupe de Brauer des corps et la cohomologie étale.

Soit p un premier, et k un corps de caractéristique différente de p. Un exemple fondamental est donné par les groupes de cohomologie $H^n(k, \mu_p)$, où μ_p désigne le groupe des racines p-ièmes de l'unité dans une clôture algébrique de k. Lorsque $n = 2$, ce groupe correspond à la p-torsion du groupe de Brauer de k. L'objectif de ce projet est d'étudier les liens entre l'existence de filtrations sur la K-théorie de Milnor de k et l'existence de décompositions en sommes de cups-produits de symboles pour les éléments de $H^n(k, \mu_p^{\otimes n})$.

L'existence de telles décompositions, c'est à dire la surjectivité du morphisme

$$H^1(k, \mu_p)^{\otimes n} \longrightarrow H^n(k, \mu_p^{\otimes n})$$

induit par le cup-produit a été recherchée ardemment par la communauté ces 30 dernières années. Elle fut dans un premier temps démontrée dans le cas $n = 2$ par Merkurjev et Suslin. C'est ensuite Voevodsky qui prouva le cas $p = 2$ (conjecture de Milnor) et le cas général (conjecture de Bloch et Kato) obtenant de fait la médaille Fields pour ces travaux.

Les conséquences de ces théorèmes sont innombrables : le théorème de Merkurjev Suslin stipule par exemple que tout algèbre simple centrale est Brauer équivalente à un produit tensoriel d'algèbres cycliques. La conjecture de Bloch et Kato clarifie le lien entre la K-théorie de Milnor du corps k et le groupe de cohomologie $H^n(k, \mu_p^{\otimes n})$. Enfin, la conjecture de Bloch-Kato est équivalente à la conjecture de Beilinson-Lichtenbaum, qui identifie la cohomologie étale des racines p-ièmes de l'unité et cohomologie motivique de $\mathbb{Z}/p$.

II. Sommes de symboles et filtrations de Koszul

L'objectif de ce projet de thèse est d'éclaircir le lien qu'entretiennent l'existence de décompositions en sommes de symboles dans $H^n(k, \mu_p^{\otimes n})$ et l'existence de filtrations particulières, dites de Koszul, sur la K-théorie de Milnor du corps k. La notion de filtration de Koszul a été introduite par A. Vishik et L. Positselski [2].

Bui Quang-Tu a entamé cette étude pendant son Master 2, dirigé par Mathieu Florence en ce moment à l'université Paris 6. Plus précisément il y étudie dans son mémoire principalement deux articles, dus à L. Positselski et Vishik : le premier [2] montre que l'existence d'une filtration de Koszul sur la K-théorie de Milnor d'un corps k implique la conjecture de Bloch et Kato pour k. Le second article [3] prouve l'existence de filtrations de Koszul pour la K-théorie de Milnor des corps de nombres.

Les questions et prolongements suivants seront étudiés lors de cette thèse :

1. Peut-on construire de nouveaux exemples de corps dont la K-théorie de Milnor admet une filtration de Koszul ? Les corps de fonctions de surfaces sur $\mathbb{C}$ sont un bon point de départ. Il est légitime aussi de poser la question de l'existence de telles filtrations pour les groupes fondamentaux (étales) des courbes sur $\mathbb{C}$.
2. Peut-on dégager une caractérisation cohomologique des corps dont la K-théorie de Milnor admet une filtration de Koszul ? L'étude des corps de dimension cohomologique inférieure à 2 semble un bon point de départ.
3. Peut-on prouver l'existence de filtrations de Koszul pour des corps arithmétiques par l'étude de la Koszulité sur les corps locaux ? Y a-t-il un principe local-global pour l'existence de telles filtrations ?
4. En renforcant les hypothèses sur les filtrations de Koszul, peut-on obtenir des bornes sur les écritures en sommes de cup-produits de symboles ? Peut-on retrouver les bornes connues ?
5. La question 4 peut aussi être adaptée à caractéristique p. Peut-on retrouver (voire même améliorer ?) les bornes obtenues [1] par M. Florence ?

La grande variété des notions (cohomologie Galoisienne, K-théorie, arithmétique, cohomologie étale...) rencontrées par Bui Quang-Tu lors de l'étude de ces deux articles et la qualité de son mémoire lui assurent une solide assise pour étudier ces questions.

Bibliographie

[1] M. Florence, On the symbol length of p-algebras, Comp. Math. 149, 1353-1363, 2013.

[2] L. Positselski, A. Vishik, Koszul duality and Galois cohomology, Mathematical Research Letters 2(6), 771-781, 1995.

[3] L. Positselski, Galois cohomology of a number field is Koszul, Journal of Number Theory Volume 145, 126-152, 2014.