Etude des instabilités non linéaires autour de solutions laminaires de systèmes d'EDP de la mécanique des fluides ou des modèles de propagation en biologie

La stabilité de systèmes non linéaires est un problème qui remonte par exemple à Engelmann [3] pour un système physique où l'instabilité est une réalité. Ce domaine donne lieu à de nombreux travaux de recherche. Parmi ces travaux de recherche, citons, en particulier, Evans (1974)[5], [6], Grenier [7], Desjardins-Grenier [1], [2], Zumbrun [9], Guo-Hwang [4]...

Généralement, lorsqu'un système d'EDP d'évolution présente une solution particulière (qui peut être constante, ou présenter deux états comme dans le cas d'ondes de choc), on étudie la stabilité de cette solution. Le résultat principal qui est souvent obtenu est la stabilité exponentielle de telles solutions particulières. Dans le cas d'une onde progressive comme l'influx nerveux (qui est une solution de la forme $(t, x) \to \phi(x - ct)$ des équations de Hodgkin-Huxley), cette stabilité exponentielle s'obtient grâce à la stabilité exponentielle du système linéarisé autour de cette onde progressive, et cette stabilité exponentielle du système linéarisé entraine la stabilité exponentielle du système non linéaire, qui peut s'exprimer en remarquant que toute solution dont la donnée initiale est proche de la donnée initiale $\phi(x)$ converge, exponentiellement en temps, vers une translatée en x de $(t, x) \to \phi(x - ct)$.

Les résultats d'instabilité non linéaires sont moins fréquents, essentiellement car on ne connait que dans peu de cas l'effet des termes non linéaires sur le contrôle de la croissance exponentielle d'une solution quelconque du linéarisé (en supposant que le système linéarisé autour de la solution considérée dont on veut étudier la stabilité soit linéairement instable).

Un des résultats de non stabilité, qui est plus puissant que simplement dire qu'une solution particulière n'est pas stable, est de démontrer que si U est une solution de référence du système, et si V est une autre solution vérifiant $(V - U)|_{t=0} = \eta W_0$, $\eta << 1$, alors V existe sur $(0, T)$ et, de plus, il existe $t_0 \in (0, T)$ tel que $(V - U)(t_0)$ est de norme (dans un espace ad-hoc) $\frac{1}{2}$. Ceci veut dire que la solution V du système est, à $t = 0$, proche de la solution particulière U alors qu'en temps fini, elle s'éloigne de cette solution particulière.

Les systèmes sur lesquels cette méthode devrait pouvoir s'appliquer sont nombreux. Le résultat a été obtenu par E. Grenier [7] pour la couche limite de Prandtl, par Y. Guo et H.J.Hwang [4] pour le système des équations d'Euler incompressibles autour d'un profil de densité permettant l'apparition d'une instabilité physique qui s'appelle 'instabilité de Rayleigh-Taylor', a été généralisé par B. Desjardins et E. Grenier [1] pour des couches limites en mécanique des fluides, et par O. Lafitte dans un cas plus général d'instabilité de Rayleigh-Taylor [10]. La méthode consiste à construire une suite de solutions approchées du problème linéarisé (en prenant par exemple un développement en η introduit ci-dessus et en calculant chacun des termes successifs de ce développement), et à contrôler la croissance en temps des termes d'ordre élevé de ce développement.

Ce contrôle s'effectue par l'étude précise du taux de croissance en temps linéaire d'une instabilité, et à contrôler ce taux de croissance uniformément par rapport à la fréquence d'oscillation moyenne en espace de la perturbation. Plus précisément, considérant une perturbation de la donnée initiale $U|_{t=0}$ pour la solution particulière $U(z - ct)$ de la forme $V|_{t=0} = U|_{t=0} + \eta W e^{ik.x}$, $x \in \mathbb{R}^d$, on cherche à contrôler le taux de croissance $\tau(k)$, la solution W du problème linéarisé associé s'écrivant

$$W(t, x) = e^{i\tau(k)t} w(z, k) e^{ik.x}.$$

Ce contrôle doit s'effectuer par une fonction de $||k||$. Dans le cas de l'instabilité de Rayleigh-Taylor [4], [10], le contrôle par $\sqrt{||k||}$ de ce taux de croissance permet de contrôler le comportement de $V - U|_{t=0} - \eta W(t, x)$. Dans le cas étudié par Desjardins et Grenier [2], il suffit d'un contrôle de $\tau(k_1 + k_2)$ par $\tau(k_1) + \tau(k_2)$.

Les valeurs de τ sont les zéros d'une fonction, qui s'appelle la fonction d'Evans (introduite dans [6] et dénommée ainsi par Alexander, Gardner et Jones), qui est étudiée par K. Zumbrun et les personnes avec lesquelles il travaille. De nombreux résultats sur cette fonction d'Evans et ses zéros ont été obtenus dans le cas stable, et dans des cas d'instabilité 'faible'.

Beaucoup de systèmes d'EDP hyperboliques présentent des instabilités autour d'un profil qui pourraient être étudiés par cette méthode: le système de Hodgkin-Huxley (qui régit la propagation des influx nerveux dans un axone), le système de Zeldovich-Von Neuman-Doring (pour lequel l'instabilité du linéarisé est maintenant presque complètement étudiée [11], [12]), le système de la magnétohydrodynamique [8], et divers systèmes liés aux équations d'Euler ou de Navier-Stokes avec équations pour l'énergie ou l'entropie, généralisations du systèmes ZND.

Nous proposons donc d'étudier cette problématique dans le cas de solutions particulières instables pour des problèmes de mécanique des fluides (telles que les instabilités hydrodynamiques classiques) et pour les problèmes de mathématiques appliquées à la biologie (cas où des solutions des équations de propagation de l'influx nerveux (dans les axones) ou de l'influx électrique (dans les fibres musculaires) qui présenteraient des instabilités.

Ce sujet est nouveau, car les résultats non linéaires sur les systèmes d'EDP ont été bien étudiés, mais la partie 'instabilité du linéarisé' pour ces systèmes, et en particulier le contrôle des termes non linéaires lorsqu'on contrôle le taux de croissance $\tau(||k||)$ n'a pas été fait dans des cas, en mécanique des fluides par exemple, distincts de cas où on se ramenait à un contrôle de l'énergie pour le système linéarisé (et essentiellement pour des équations où la condition $\text{div}\vec{u} = 0$ était satisfaite). Par exemple, le système ZND linéarisé est un vrai système d'ordre $d + 2$, d dimension d'espace, donc ne conduit pas à un opérateur autoadjoint dont on cherche la plus petite valeur propre.

References

[1] B. Desjardins, E. Grenier Linear instability implies nonlinear instability for various boundary layers Annales de l'IHP (C) Nonlinear analysis volume 20 (2003), 1, 87-106

[2] B. Desjardins, E. Grenier On nonlinear Rayleigh-Taylor instability Acta math sinica (Eng. ser.) 22 (2006), 1007-1016

[3] F. Engelmann et al. Nonlinear effects from Vlasov's equations Phys. Fluids 6 (1963), 266-275

[4] Y. Guo, H.J. Hwang On the dynamical Rayleigh-Taylor instability Arch. Ration. Mech. Anal. 167 (2003), 235-253

[5] J.W. Evans Nerve axon equations: 1 Linear approximations Indiana University Math Journal 21 (1971-1972), 877-885

[6] J.W. Evans Nerve axon equations: 3: stability of the nerve impulse Indiana University Math Journal 22 (1972-1973), 577-593

[7] E. Grenier On the nonlinear instability of Euler and Prandtl equations Comm. Pure Appl. Math. 53 (2000), 9, 1067-1091

[8] J. Humpherys, O. Lafitte, K. Zumbrun Stability of isentropic Navier-Stokes shocks in the high Mach number limit Comm. Math. Phy. 293 (2010) 1, 1-36

[9] M.A. Johnson, K. Zumbrun Nonlinear stability of periodic traveling-wave solutions of viscous conservation laws in dimensions one and two Siam J. Appl. Dyn. Sys. 10 (2011) 1, 189-211

[10] O. Lafitte The linear and nonlinear Rayleigh-Taylor instability for the quasi-isobaric profile Phys. D 237 (2008) 10-12, 1602-1639

[11] O. Lafitte, K. Zumbrun, M. Williams High frequency stability of detonations and turning points at infinity SIAM Journal of Math. Anal 47 (2015) 3, 1800-1878

[12] O. Lafitte, K. Zumbrun, M. Williams The Erpenbeck high frequency instability theorem for Zeldovitch-von Neumann-Doring detonations Arch. Ration. Mech. Anal. 204 (2012), 1, 141-187