

Sujet de thèse au LAGA : Type d'homotopie modéré des espaces de noeuds

Grégory Ginot (directeur de thèse) et Geoffroy Horel (coencadrant)

Un résultat fondamental de la théorie homotopique des opérades est le théorème de formalité des opérades des petits disques. Ce théorème a été montré rigoureusement par Lambrechts et Volic en suivant une stratégie esquissée par Kontsevich. Il affirme que l'opérade des petits disques est formelle. Concrètement, cela signifie que son type d'homotopie rationnel est déterminé par sa cohomologie. De ce résultat de formalité, il est possible de déduire un résultat de coformalité qui affirme que le type d'homotopie rationnel de cette opérade est également déterminé par ses groupes d'homotopie rationnels munis de leur crochet de Whitehead.

Ce résultat implique l'effondrement de la suite spectrale de Goodwillie-Weiss qui calcule les groupes d'homotopies rationnels de l'espace des longs noeuds dans \mathbb{R}^d pour $d \geq 4$ (et qui en calcule une approximation pour $d = 3$). Le lien entre l'opérade des petits disques et l'espace des longs noeuds n'a rien d'évident et résulte de travaux de Dwyer-Hess et Turchin. En fait ce résultat de coformalité permet même de décrire complètement le type d'homotopie rationnels de ces espaces de noeuds en termes de complexes de graphes (Fresse-Turchin-Willwacher).

Le but de ce sujet de thèse est de pousser ces résultats dans le monde de la théorie de l'homotopie modérée. Pour r un entier supérieur à 2, un espace $(r - 1)$ -connexe X est dit modéré si les groupes d'homotopie $\pi_{k+r}(X)$ n'ont pas de p -torsion pour des nombres premiers p tels que $2p - 3 \leq k$. Dwyer a montré qu'une grande partie de la théorie de l'homotopie rationnelle s'étend au cadre modéré. En particulier, les types d'homotopies modérés peuvent se représenter par des algèbres de Lie différentielles graduées sur \mathbb{Z} .

La première étape de ce projet de thèse sera de montrer que l'opérade des petits disques est modérément coformelle (c'est-à-dire que son type d'homotopie modéré est déterminé par ses groupes d'homotopies munis de leur crochet de Whitehead). Il s'agira d'affiner les méthodes introduites par Boavida de Brito et Horel (le coencadrant) qui leur ont permis de montrer un résultat de formalité partiel de cette opérades sur les corps finis. On exploitera l'action du groupe de Grothendieck-Teichmüller sur cette opérade pour montrer que les obstructions à la coformalité sont triviales.

La seconde étape sera d'exploiter ce résultat de coformalité pour construire un modèle du type d'homotopie modéré de l'espace des longs noeuds dans \mathbb{R}^d (ou plus précisément de son double délaçage). C'est-à-dire une algèbre de Lie différentielle graduée qui encode ce type d'homotopie par le résultat de Dwyer. Nous conjecturons que le modèle en termes de complexes de graphes restera valable dans ce cadre.

Ce résultat peut potentiellement se généraliser dans plusieurs directions. En particulier, on pourra notamment essayer de l'étendre à des espaces de plongements plus compliqués comme les plongements de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^d . Ou bien les noeuds dans une variété de dimension 3 quelconque

UNIVERSITÉ SORBONNE PARIS NORD, INSTITUT GALILÉE, 99 AVENUE JEAN-BAPTISTE CLÉMENT, 93430 VILLETANEUSE
ginot@math.univ-paris13.fr horel@math.univ-paris13.fr,