# Proposition de sujet de thèse

F. Nier
LAGA, UMR-CNRS 7539,
Université de Paris 13,
av. J.B. Clément,
93430 Villetaneuse, FRANCE

14 mai 2019

**Titre de la thèse :**
Quantification de la dynamique de solitons
**Directeur :** Francis Nier (PR, LAGA, Univ. Paris 13)

**Coencadrants :** Jacek Jendrej (CR-CNRS, LAGA, Paris 13) ; Zied Ammari (MCF-HDR, IRMAR, Univ. Rennes 1)

**Description :**
L'étude des modèles des limites de champ moyen quantiques a connu de nombreux développements mathématiques ces vingt dernières années, menées par différentes équipes ou écoles : Les travaux autour de J. Fröhlich et B. Schlein sur les aspects dynamiques, les travaux inspirés par E. Lieb surtout autour des problèmes stationnaires développés par R. Seiringer et M. Lewin entre autres, les travaux autour de F. Golse, L. Erdös ou H.T. Yau beaucoup plus insipirés par des analogies avec la théorie cinétique des gaz classiques aussi abordées avec d'autres objectifs par des probabilistes. Cela a des liens avec les nombreux travaux sur les mesures de Gibbs associées aux équations d'évolution non linéaires. Zied Ammari et moi-même avons contribué à ce développement, notamment sur les aspects dynamiques, en montrant comment les outils de l'analyse microlocale étendus à des problèmes sur des espaces des phases de dimension infinie fournissait le cadre naturel pour l'asymptotique de champ moyen bosonique. Si l'idée n'était pas nouvelle et avait été implémentée avec succès dès les années 70-80 par K. Hepp puis par J. Ginibre et G. Velo pour traiter de façon mathématique précise ces asymptotiques pour des modèles pertinents de la physique quantique, ces premières méthodes concernaient la dynamique avec données initiales particulières, états cohérents compressés pour les connaisseurs. Cette approche a aussi connu des développements récents avec l'équipe de L. Amour, J. Nourrigat et L. Jagger à Reims, entre autres motivés par des modèles de résonance magnétique nucléaire. L'introduction dans les années 90 des mesures semiclassiques, appelées aussi mesures de Wigner, et le développement a peu près simultané des méthodes de transport de mesure, motivés par l'étude du transport optimal, nous ont fourni les outils pour étudier l'asymptotique de champ moyen pour des états quantiques généraux dans le cadre bosonique. Avec ce point de vue, nous avons pu montrer à l'aide d'exemples avec Z. Ammari que l'image de l'asymptotique de champ moyen bosonique comme une asymptotique de décorrélation quantique, si elle est tout à fait pertinente dans le cas de la dynamique

d'états cohérents, doit être modifiée et peut être précisée par une interprétation géométrique de la dynamique dans l'espace des phases (de dimension infinie).
Dans certains textes classiques ou programmatiques de la physique mathématique, est évoquée la question de l'asymptotique de champ moyen quand le modèle de champ moyen, EDP d'évolution non linéaire, exhibe des solitons, solutions particulières se propageant sans se déformer. Par exemple on pourra consulter les toutes dernières pages de [2], le texte de séminaire de J. Fröhlich [3] ; le livre de physique de E. Weinberg [5] ; et tout récemment la prépublication de D. Stuart [4].
Le projet de thèse consiste à étudier sur des modèles simples, permettant des énoncés mathématiques les plus précis possibles, mais ne correspondant pas forcément à des modèles stricts de la physique, comment des résultats de stabilité ou d'interaction de solitons pour le modèle de champ moyen, même partiels une théorie complète manquant pour la plupart des modèles, se traduisent au niveau de la dynamique quantifiée dans le cadre d'une asymptotique de champ moyen.

Nous pensons plus particulièrement à la quantification bosonique du modèle $\phi_2^4$, 4 faisant référence au degré du polynôme de Wick dans le terme d'interaction et $2 = 1 + 1$ décrivant la dimension de l'espace temps. Ce modèle est présenté dans [2] [4] et [5], même si dans ce dernier texte la quantification fermionique est plus naturelle avec des liens toutefois avec le cas bosonique. Un avantage de ce modèle est que les solitons de l'EDP d'évolution sont bien connus avec des expressions explicites. En revanche la version quantique suppose de définir le hamiltonien par des techniques de renormalisation (voir [4]). D'autres modèles simples sont à envisager comme NLS (équation de Schrödinger non linéaire) en dimension 1 d'espace, qui a une structure intégrable et pose moins de problème pour la quantification bosonique, ou le modèle de sine-Gordon ou le polynôme $\phi^4$ est remplacé par $\cos(\phi) - 1$. La thèse consistera dans un premier temps :

**1)** A préciser les propriétés de base de ces modèles, tant au niveau du modèle de champ moyen que du modèle quantifié. Notamment il s'agira de préciser les différentes façons d'introduire le paramètre de champ moyen en lien avec les techniques de renormalisation pour $\phi_2^4$ qui s'expriment plutôt en termes d'un paramètre de couplage. Eventuellement on considèrera pour la suite le modèle qui présente le moins de difficultés techniques à ce niveau.

**2)** Voir ce que donne les outils standard, du type méthode de Hepp avec les états cohérents centrés en des solitons perturbés, dans la version quantifiée de la dynamique. Cela devrait permettre d'avoir un premier résultat sur la traduction quantique des résultats de stabilité des solitons.

Concomitamment, le(la) doctorant(e) devra se familiariser avec l'analyse précise des solitons sur des EDPs d'évolution simples ; les outils de transport de mesure et leur application aux problèmes de champ moyen bosonique.

**3)** Dans une dernière étape, l'objectif est de comprendre comment l'interaction des solitons décrite, même dans un cadre restrictif, dans les modèles de champ moyen peut être enrichie par des fluctuations quantiques en asymptotique de champ moyen. Pour cela l'outil des mesures de Wigner semble utile pour bien interpréter la géométrie de ces dynamiques au premier ordre.

**4)** Se posera ensuite la question de raffiner l'analyse ou de chercher à l'étendre à des modèles plus pertinents du point de vue de la physique.

Pour ce faire le(la) doctorant(e) pourra s'appuyer sur les compétences de J. Jendrej qui est un excellent spécialiste de la dynamique des solitons (cours Peccot au Collège de France en 2019), de Z. Ammari et moi-même sur les problèmes de champ moyen et l'analyse semiclassique en dimension infinie.

Les compétences requises de niveau M2 sont :

**1)** Les notions de base sur les équations aux dérivées partielles linéaires ou non linéaires, elliptiques, paraboliques, hyperboliques.

**2)** Les notions de base de la théorie spectrale : opérateur auto-adjoints, calcul fonctionnel.

**3)** Des connaissances de base sur le calcul pseudodifférentiel et l'analyse microlocale ou semiclassique.

**4)** Eventuellement connaître le formalisme de la théorie quantique des champs non relativiste.

**Ci-dessous une bibliographie extrêmement réduite.**

# Références


[1] Z. Ammari, F. Nier : Mean field propagation of infinite dimensional Wigner measures with a singular two-body interaction potential. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Sienze, Serie V, Vol XIV, Fasc 1 (2015)

[2] J. Glimm, A. Jaffe : Quantum physics. A functional integral point of view. Second edition. Springer-Verlag, New York, 1987

[3] [Fro] J. Fröhlich : Mean-field limit of quantum Bose gases and nonlinear Hartree equation. Séminaire Equations aux Dérivées Partielles. 2003-2004, Exp. No. XIX, 26pp. Ecole Polytechnique, Palaiseau (2004).

[4] [Stu] D. Stuart : Hamiltonian quantization of solitons in $\Phi^4_{1+1}$ quantum field theory I. The semiclassical phase-shift. arXiv :1904.02588

[5] [Wei] E. Weinberg. Classical solutions in quantum field theory. Solitons and instantons in high energy physics. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, Cambridge, 2012