

PROJET DE THÈSE : SPECTRES CYCLOTOMIQUES ET THÉORIES DES CHAMPS

CHRISTIAN AUSONI (DIRECTEUR DE THÈSE) GEOFFROY HOREL (COENCADRANT)

L'homologie de Hochschild est un invariant fondamental des algèbres associatives. Lorsque l'algèbre est commutative et lisse, cette théorie est simplement le complexe de de Rham algébrique. On peut donc voir cet invariant comme une version non-commutative du complexe de Rham. Il existe un opérateur de degré 1 sur l'homologie de Hochschild qu'on appelle la différentielle de Connes. Dans le cas commutatif lisse, il s'agit simplement de la différentielle de de Rham. Géométriquement, on peut penser à cet opérateur comme une action du groupe S^1 des nombres complexes de module 1 sur le complexe de Hochschild.

Le complexe de Hochschild a été généralisé par Bökstedt qui a introduit l'homologie de Hochschild topologique. Cette construction est complètement parallèle à celle du complexe de Hochschild classique, il s'agit simplement de remplacer l'anneau de base \mathbb{Z} par \mathbb{S} (le spectre en sphère). Dans le cas d'une \mathbb{Q} -algèbre, l'homologie de Hochschild et l'homologie de Hochschild topologique coïncident mais en caractéristique positive, l'homologie de Hochschild topologique est un invariant beaucoup plus riche.

Tout comme l'homologie de Hochschild ordinaire, l'homologie de Hochschild topologique possède une action du groupe S^1 . Il existe en fait une structure plus fine appelée structure cyclotomique. Cette dernière est ce qui permet de construire l'homologie cyclique topologique qui joue un rôle essentiel dans certains calculs de K-théorie algébrique. Cette structure joue également un rôle important dans les récents travaux de Scholze et ses collaborateurs sur la théorie de Hodge p -adique entière.

Dans le cas des algèbres Calabi-Yau, il est connu que l'homologie de Hochschild a une structure multiplicative très riche : celle d'une théorie topologique des champs de dimension 2. C'est à dire qu'on dispose d'opérations indexées par l'espace de module des surfaces de Riemann avec des composantes de bord. L'action de S^1 est alors simplement l'opération venant du cylindre vu comme une surface à deux composantes de bord.

Le but de cette thèse est de comprendre comment ces deux structures interagissent dans l'homologie de Hochschild topologique. L'homologie de Hochschild topologique d'une algèbre de Calabi-Yau doit avoir la structure d'une théorie des champs topologique cyclotomique. La première étape de ce projet est de définir précisément cette notion. Celle-ci doit se spécialiser d'une part sur la structure cyclotomique et d'autre part sur la structure de théorie topologique des champs et doit expliquer les interactions entre ces deux structures. Il s'agira ensuite de comprendre quelle structure est induite sur l'homologie cyclique topologique des algèbres de Calabi-Yau. Enfin il serait souhaitable d'essayer de calculer ces opérations nouvelles dans certains cas concrets d'algèbre de Calabi-Yau.