SUJET DE THÈSE: ALGÈBRE DE CLIFFORD GÉNÉRALISÉE

Proposé par Baptiste Calmès et Anne Quéguiner-Mathieu

1. Contexte

L'algèbre de Clifford d'une forme quadratique est un objet algébrique très classique, qui intervient dans de nombreux contextes, allant de la périodicité de Bott en topologie algébrique à la classification des formes quadratiques par leurs invariants cohomologiques. Dans ce contexte, on peut la définir très simplement, comme quotient de l'algèbre tensorielle de l'espace vectoriel sous-jacent par la relation $x^2 = q(x)$, où x désigne un vecteur et $q(x)$ la valeur correspondante de la forme quadratique considérée. Sa structure est également bien connue; suivant la parité de la dimension de l'espace vectoriel sous-jacent et la valeur du discriminant de la forme quadratique, c'est soit une algèbre centrale simple soit un produit direct de deux algèbres centrales simples. De plus, elle est munie d'une $\mathbb{Z}/2$ graduation naturelle, et d'une involution canonique.

Plusieurs directions de généralisation de cette construction ont été explorées dans la littérature (cf. [11, 2, 3, 4, 10, 8, 5, 9, 1]), par exemple en remplaçant les formes quadratiques par d'autres types de formes (de degré autre que 2). Ces généralisations n'ont pour l'instant pas atteint la renommée de l'algèbre de Clifford quadratique, pour plusieurs raisons: certaines définitions sont un peu ad hoc, et d'autres produisent des algèbres beaucoup plus compliquées que l'algèbre de Clifford d'une forme quadratique, et à la structure mal comprise .

Une prépublication de Krashen et Lieblich [7] propose la construction d'une algèbre de Clifford associée à un morphisme fini de schémas, qui généralise les algèbres de Clifford de formes quadratiques et de nombreuses autres constructions plus récentes d'algèbres de Clifford.

Un aspect intéressant de cette construction est que l'algèbre de Clifford usuelle d'une forme quadratique s'obtient comme un cas particulier en utilisant un revêtement de degré 2 sur un schéma *projectif*, ce qui reflète le caractère homogène des relations qui la définissent classiquement. Cela sort également l'algèbre de Clifford du cadre de l'algèbre pour la replacer de manière essentielle dans le cadre de la géométrie algébrique (les schémas projectifs sont rarement affines...).

Un autre aspect est que cette algèbre de Clifford d'un morphisme fini est définie universellement par la (co-)représentabilité d'un certain foncteur des algèbres sur une base vers les faisceaux sur cette base, mais que cette propriété universelle n'est pas, ou en tout cas pas de manière évidente, la propriété universelle classique d'une algèbre de Clifford (cf. par exemple [6]).

2. Sujet

La construction de Krashen et Lieblich manque toutefois de propriétés calculatoires, et fournit donc assez peu d'informations sur ces nouvelles algèbres ou les anciennes.

2.1. **Nouvelle interprétation.** Pour remédier à cela, il y a néanmoins une manière de voir sous un autre angle et de généraliser leur construction en considérant un éventuel adjoint à gauche d'une extension des scalaires pour des algèbres (non nécessairement commutatives), dans l'esprit d'une restriction à la Weil. Un tel adjoint n'existe pas en toute généralité pour des raisons évidentes d'absence de commutation de l'extension des scalaires aux limites, et le problème est en premier lieu de dégager un cadre dans lequel il existerait. Plusieurs possibilités sont envisageables: soit restreindre les catégories d'algèbres envisagées, soit affaiblir la notion d'adjonction en une adjonction partielle, ou en utilisant la notion d'extension de Kan, soit passer à des catégories dérivées ou supérieures.

2.2. **Propriétés.** Cette nouvelle interprétation devrait permettre d'obtenir des propriétés de composition, formule de projection etc. qui généraliseraient éventuellement le calcul de l'algèbre de Clifford de la somme orthogonale de deux formes quadratiques. Cela pourrait également permettre de relier entre elles plusieurs sortes d'algèbres de Clifford et donc probablement de fournir des calculs de ces nouvelles algèbres de Clifford dans des cas particuliers et d'en préciser la structure.

2.3. **Exemples.** Parmi les exemples concrets à envisager, celui d'un morphisme étale fini semble un des premiers à regarder de près, car il a un caractère combinatoire.

Divers cas de morphismes projectifs définis par des sections de fibrés bien choisis sont également à envisager.

References

[1] A. Chapman and J.-M. Kuo. On the generalized Clifford algebra of a monic polynomial. *Linear Algebra Appl.*, 471:184–202, 2015.

[2] D. E. Haile, On the Clifford algebra of a binary cubic form, Amer. J. Math. **106** (1984), no. 6, 1269–1280.

[3] D. E. Haile, , On Clifford algebras, conjugate splittings, and function fields of curves, Ring theory 1989 (Ramat Gan and Jerusalem, 1988/1989), Israel Math. Conf. Proc., vol. 1, Weizmann, Jerusalem, 1989, pp. 356–361.

[4] D. E. Haile, When is the Clifford algebra of a binary cubic form split?, J. Algebra **146** (1992), no. 2, 514–520.

[5] D. E. Haile and I. Han, On an algebra determined by a quartic curve of genus one, J. Algebra **313** (2007), no. 2, 811–823.

[6] M.-A. Knus. *Quadratic and Hermitian forms over rings*, volume 294 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[7] D. Krashen and M. Lieblich. The Clifford algebra of a finite morphism. arXiv:1509.07195

[8] R. S. Kulkarni, On the Clifford algebra of a binary form, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), no. 8, 3181–3208 (electronic).

[9] J.-M. Kuo, On an algebra associated to a ternary cubic curve, J. Algebra **330** (2011), 86–102.

[10] C. J. Pappacena. Matrix pencils and a generalized Clifford algebra, Linear Algebra Appl. **313** (2000), no. 1-3, 1–20.

[11] N. Roby, Algèbres de Clifford des formes polynômes, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **268** (1969), A484–A486.