Proposition de sujet de thèse

Titre : Flots d'Anosov construits par recollements de blocs hyperboliques

Directeur de thèse : François Béguin, professeur à Paris 13, beguin@math.univ-paris13.fr

Laboratoire d'accueil : LAGA, Institut Galilée

Contexte : Le sujet se situe ***à l'interface entre topologie et systèmes dynamiques***, et concerne plus précisément les ***flots d'Anosov***. De manière informelle, il s'agit des systèmes dynamiques à temps continus "les plus uniformément chaotiques possibles". On s'intéresse au comportement dynamique de ces flots à *équivalence orbitale* près, c'est-à-dire à choix de coordonnées et de paramétrage du temps près. Paradoxalement, "l'omniprésence et l'uniformité du chaos" tend à rigidifier fortement la dynamique des flots d'Anosov, en particulier en basses dimensions :

- Les flots d'Anosov sont *structurellement stables* : si on considère un flot d'Anosov, tout système proche aura la même dynamique (à équivalence orbitale près).
- Plusieurs résultats (de Plante, Ghys, Barbot, Fenley) montrent des liens forts entre la dynamique d'un flot d'Anosov et la topologie de la variété qui le porte. Autrement dit, pour les flots d'Anosov, la forme de l'espace des phases contraint fortement — voire détermine — le comportement dynamique.

Ces deux propriétés fondent l'intérêt pour les flots d'Anosov. La première laisse entrevoir la possibilité d'une classification complète des flots d'Anosov par des invariants combinatoires. La seconde promet qu'une meilleure connaissance de la dynamique des flots d'Anosov devrait faire progresser notre compréhension de la topologie des variétés, et vice-versa. À ce jour, les flots d'Anosov restent néanmoins assez mystérieux même en petites dimensions.

Récemment, Bonatti, Yu et moi avons mis au point un procédé très général de ***construction de flots d'Anosov en dimension 3 "par recollement de blocs hyperboliques"***. Un *bloc hyperbolique* est une variété à bord, munie d'un flot transverse au bord, tel que la plupart des orbites du flot entre par une composante de bord et sortent rapidement par une autre, mais tel que les quelques orbites qui restent à l'intérieur forment un ensemble "uniformément chaotique". Nous avons montré qu'il est possible de recoller des blocs hyperboliques afin d'obtenir une variété fermée munie d'un flot d'Anosov (dont la dynamique est beaucoup plus riche que celle des blocs initiaux). Réciproquement, nous avons prouvé qu'un flot d'Anosov admet toujours un découpage naturel en blocs hyperboliques. Ces travaux montrent que les monde des flots d'Anosov est encore plus riche qu'on le pensait, mais ouvrent aussi la voie à une nouvelle approche du sujet : on peut voir un flot d'Anosov comme un recollement de blocs hyperboliques, souvent nettement plus simples que le flot de départ.

Buts de la thèse : Je propose un sujet s'articulant autour de deux axes complémentaires.

D'une part, ***généraliser le procédé de construction de flots d'Anosov par recollement de blocs hyperboliques***, pour inclure le cas où le flot est "quasi-transverse" aux bords des blocs. Cela signifie qu'on considère des blocs hyperboliques dont les bords contiennent un nombre fini d'orbites, en dehors desquels le flot est transverse au bord. Au premier abord, cela semble une amélioration technique insignifiante et gratuite du travail que Bonatti, Yu et moi avons effectué. Il n'en est rien. En effet, Barbot a montré que toute surface incompressible dans une variété qui porte un flot d'Anosov peut être mise en position quasi-transverse, mais pas transverse, au flot. Les surfaces incompressibles découpent donc tout flot d'Anosov en bloc hyperboliques à bords quasi-transverses. Si on veut bien comprendre l'interaction entre la topologie d'une variété et la dynamique des flots d'Anosov qu'elle porte, il faudra donc considérer des flots d'Anosov obtenus par recollements de bloc hyperboliques, *avec des bords quasi-transverses au flot.*

D'autre part, ***classifier les blocs hyperboliques***. C'est un but très naturel : nous savons que beaucoup de flots d'Anosov peuvent être construits par recollement de bloc hyperboliques ; Yu et moi avons montré que la "façon dont on recolle" des blocs donnés n'a guère d'influence sur le résultat ; il reste à comprendre les blocs ! Des outils combinatoires ont été mis en place, par Bonatti, Langevin et moi-même. Ils donnent une description complète de chaque bloc hyperbolique. Le problème est que chaque bloc peut être décrit par d'une infinité de manières différentes ! Il faudrait donc trouver une méthode (un algorithme) pour déterminer si deux descriptions combinatoires différentes correspondent en fait au même bloc hyperbolique. Je suis persuadé qu'un moyen d'attaquer le problème est d'utiliser un objet introduit par Barbot et Fenley: *l'espace des orbites* d'un flot d'Anosov. Il s'agira de comprendre comment les propriétés géométriques de cet espace peuvent se lire sur les objets combinatoires évoqués ci-dessus.