Titre de la thèse : "Matrices totalement équimodulaires"

Directeur :
Roberto Wolfler Calvo
roberto.wolfler@lipn.univ-paris13.fr

Co-encadrant :
Roland Grappe
grappe@lipn.univ-paris13.fr

Laboratoire :
LIPN (Laboratoire d'Informatique de Paris Nord), UMR CNRS 7030, Université Paris 13

Contexte scientifique

Une des méthodes les plus puissantes pour résoudre les problèmes d'optimisation combinatoire est la méthode dite polyédrale. Elle consiste à décrire l'enveloppe convexe des solutions du problème à l'aide d'inégalités linéaires, ramenant ainsi le problème à un programme linéaire qui peut être résolu en temps polynomial.

Certains systèmes linéaires, appelés box-TDI, ont de bonnes propriétés d'intégralité. Ils induisent des relations min/max et permettent d'obtenir des algorithmes combinatoires en fournissant des conditions d'optimalité. De nombreux résultats d'optimisation combinatoire – tel que le célèbre théorème max-flot/min-cut – peuvent être vus comme des conséquences directes de l'existence de systèmes box-TDI [10].

Une matrice est totalement unimodulaire (TU) si le déterminant de toute sous-matrice carrée non nul vaut 1 ou -1. Un système linéaire $Ax \leq b$ décrit un polyèdre box-TDI si A est totalement unimodulaire. Plusieurs résultats combinatoires proviennent du caractère TU de la matrice définissant l'enveloppe convexe des solutions. La matrice d'adjacence d'un graphe orienté est une matrice TU. Ceci implique que le système définissant le *st*-flot maximum d'un graphe orienté est box-TDI, ce qui donne le théorème max-flot/min-cut. De la même manière, la matrice d'adjacence d'un graphe biparti est TU. Le sytème des couplages dans de tels graphes est box-TDI. Ce système implique le théorème de Kőnig [9].

Jusqu'à récemment, la quasi-totalité des systèmes box-TDI connus étaient associés à une matrice TU. En 2010, Chen, Chen, Zang ont donné une nouvelle condition impliquant le caractère box-TDI pour un système [2]. Avec d'autres, ceci leur a permis d'exhiber plusieurs nouveaux systèmes box-TDI [7, 8].

En 2018, Chervet, Grappe et Robert [5] ont donné une nouvelle caractérisation des polyèdres box-TDI : ce sont les polyèdres dont toutes les faces peuvent être décrites par des matrices équimodulaires. Une matrice est *équimodulaire* si les déterminants non nuls de toutes les sous-matrices carrées maximales ont la même valeur absolue. Ils ont également donné une nouvelle condition suffisante pour qu'un polyèdre soit box-TDI. Une matrice A est *totalement équimodulaire (TE)* si toutes les matrices obtenues par suppression de lignes de A sont équimodulaires. Les matrices TU sont un cas particulier de matrices TE. Comme l'ont montré Chervet, Grappe et Robert [5], les polyèdres décrits par ces dernières ont toujours de bonnes propriétés d'intégralité : Un polyèdre décrit par un système $Ax \leq b$ avec A TE est box-TDI.

Sujet de thèse

De nombreux polyèdres en optimisation combinatoire sont décrits des systèmes linéaires à coefficients 0/1. C'est le cas notamment des polyèdres associés aux problèmes classiques de graphes tels que celui du stable.

Les deux questions suivantes sont le point de départ d'une étude systématique des matrices TE. À terme, nous souhaitons caractériser et reconnaître les matrices TE à coefficients rationnels et mettre en lumière les liens entre ces matrices et certain types de matroides.

Classes de matrice TE à coefficients 0/1. Il s'agit de trouver des conditions nécessaires et/ou suffisantes pour qu'une matrice 0/1 soit TE. Les vecteurs d'incidence d'une famille d'ensembles laminaire forment une matrice TU [11]. Une première étape pourrait être de déterminer quelles conditions doit satisfaire une famille d'ensembles pour définir une matrice TE.

Reconnaissance de matrices TE à coefficients 0/1. On peut déterminer en temps polynomial si une matrice est TU grâce à un algorithme de décomposition des matroïdes réguliers [12]. Il n'existe, à ce jour, aucune méthode polynomiale qui permette de décider si une matrice est TE. La complexité de ce problème n'est pas connue.

On souhaite commencer par déterminer si l'algorithme de décomposition utilisé pour déterminer si une matrice est TU peut être étendu pour les matrices TE à coefficients 0/1. Les résultats obtenus pour la première question devraient permettre de déterminer les classes de base de la décomposition. Il faudra alors déterminer quels sont les opérations préservant le caractère TE d'une matrice.

Ce sujet de thèse s'inscrit parfaitement dans les recherches de l'équipe AOC du LIPN. En effet, les polyèdres box-TDI sont d'une importance fondamentale en optimisation combinatoire et constitue déjà une part importante des activités de recherche de l'équipe. Par exemple, Roberto Wolfler Calvo, Roland Grappe et Mathieu Lacroix ont soumis et publié récemment des articles sur ce sujet [5, 6, 1].

Planning pour la première année.
- — Novembre 2019 : Apprentissage des bases (Schrijver [10] Chapter 22),
- — Décembre 2019 : Apprentissage des techniques de [5],
- — Janvier-Mars 2020 : Généraliser les classes de base des matrices TU 0/1 aux matrices TE,
- — Avril-November 2020 : Étendre les opérations de [12] aux matrices TE 0/1,
- — Fin 2020 : Rédaction de l'article.

Impact et conséquences. Obtenir un théorème de décomposition pour les matrices TE aura les conséquences suivantes :
- — Ce résultat démontrera que reconnaître une matrice TE 0/1 peut se faire en temps polynomial.
- — Ce résultat fournira de nouvelles classes de polyèdres box-TDI.
- — Ce sera la base d'une reconnaissance des matrices TE dans le cas général.

Planning pour 3 ans. Le planning pour la première année est donné ci-dessus. Pour les deux années suivantes, le planning dépendra fortement des résultats obtenus durant la première année. On peut tout de même envisager que, début 2021, l'étudiant commence à considérer les matrices TE à coefficients $0/1/-1$. En particulier, il devra déterminer quelle classe de matrices TE généralise les matrices dites *network matrices*. Une fois cette nouvelle classe trouvée, les bases seront posées pour démontrer le théorème général de décomposition de matrices TE. Les outils développés lors de la première année, pour le cas 0/1, seront alors fortement utilisés. Ces deux années seront aussi l'occasion de se pencher sur les liens entre matroïdes et matrices TE.

Connaissances et compétences requises. Le candidat devra avoir des compétences en optimisation combinatoire, en recherche opérationnelle et en algèbre linéaire. Les qualités d'autonomie, de prise d'initiative et de créativité seront également recherchées.

Références

[1] Michele Barbato, Roland Grappe, Mathieu Lacroix, Emiliano Lancini, Roberto Wolfler Calvo. The Schrijver system for the cone of flows in series-parallel graphs. *Submitted.*

[2] X. Chen, Z. Chen, and W. Zang. A unified approach to box-mengerian hypergraphs. *Math. Oper. Res.*, 35(3) :655–668, 2010.

[3] X. Chen, G. Ding, and W. Zang. A characterization of box-mengerian matroid ports. *Math. Oper. Res.*, 33(2) :497–512, 2008.

[4] X. Chen, G. Ding, and W. Zang. The box-tdi system associated with 2-edge connected spanning subgraphs. *Discrete Applied Mathematics*, 157(1) :118 – 125, 2009.

[5] Patrick Chervet, Roland Grappe, Louis-Hadrien Robert. Principally Box-integer Polyhedra and Equimodular Matrices. CoRR abs/1804.08977, 2018.

[6] Denis Cornaz, Roland Grappe, Mathieu Lacroix. Trader multiflow and box-TDI systems in series-parallel graphs. *Discrete Optimization* 31 : 103–114, 2019.

[7] G. Ding, L. Tan, W. Zang. When is the matching polytope box-totally dual integral ?. *Mathematics of Operations Research* 43 (1) :64–99, 2018.

[8] G. Ding, W. Zang, Q. Zhao. On box-perfect graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 128 :17–46, 2018.

[9] D. Kőnig. Graphs and matrices. *Mat Fiz Lapok* 38 :116–119 (in Hungarian), 1931.

[10] A. Schrijver. *Theory of linear and integer programming.* Wiley-Interscience series in discrete mathematics and optimization. Wiley, 1999.

[11] A. Schrijver. *Combinatorial optimization : polyhedra and efficiency.* Algorithms and combinatorics. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, N.Y., et al., 2003.

[12] P.D. Seymour. Decomposition of regular matroids. *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 28(3) :305–359, 1980.