

## Étude asymptotique de certaines classes combinatoires divergentes présentées dans des domaines variés de l'informatique

== Contexte de la thèse ==

Nous nous intéressons depuis plusieurs années aux interactions entre le combinatoire et certains domaines de l'informatique théorique et de la physique. En particulier, aux structures mathématiques sous-jacentes des programmes concurrents et parallèles, au lambda-calcul et aux cartes.

Dans des travaux publiés récemment, nous avons été confronté au fait que de nombreux problèmes issus de ces domaines aboutissent en terme de descriptions symboliques à des équations différentiellement algébriques formelles. Ce type d'équations est encore très mal compris et leur analyse sort du cadre classique de la combinatoire analytique.

== Objectifs de la thèse ==

Considérons un exemple simple, la série  $Y(z)$  qui énumèrent les lambda-termes linaires vérifie l'équation différentiellement algébrique :  $Y(z) = 1 + 6z^2 Y(z)' + z Y(z)^2 + 4z Y(z) + 1$ . Cette équation est en faite déduite directement et assez simplement des propriétés combinatoires des lambda-termes linéaires par ce que l'on appelle classiquement la méthode symbolique. La question qui se pose est comment peut-on trouver l'asymptotique des coefficients  $y_n$  de cette série. C'est à dire asymptotiquement, combien y a-t-il de lambda-termes linéaires de taille  $n$  ?

Même avec les outils classiques de la combinatoire analytique, cette question n'est pas très simple pour deux raisons : La première est que l'équation est juste formelle et ne correspond donc pas à une fonction de la variable  $z$  ce qui empêche l'utilisation des théorèmes de transferts de Flajolet-Odlysko. La deuxième est qu'à cause du terme quadratique  $Y(z)^2$ , on ne peut pas appliquer simplement de Borel-renormalisation, c'est à dire de transformer simplement la série ordinaire  $Y(z)$  en une série exponentielle  $Y1(z)$  qui serait convergente et plus facile à étudier.

Dans le cadre de cette thèse nous souhaitons donc mettre en place les **outils théoriques nécessaires pour obtenir l'asymptotique de classes différentiellement algébriques formelles**. Et, en conséquence de produire un **package de fonctionnalités dans Maple et Sage** pour la résolution automatique de ce type de problèmes asymptotiques (au moins sur des sous-classes utiles car le problème général est connu pour être très difficile).

Nous pourrons ainsi répondre automatique à l'exemple simple des lambda-termes linéaires, mais aussi traiter des problèmes d'arbres phylogénétiques (utile en bio-informatique), des questions liés aux cartes combinatoires et aux diagrammes de Feynman (utile en physique statistique), aux permutations irréductibles et à certains problèmes de théorie de la concurrence.

Pour cela, nous nous appuierons sur une meilleur compréhension de la Borel-renormalisation « série ordinaire/ série exponentielle » et en particulier sur la mise en place de **théorèmes de transfert approché** entre ces deux mondes. Ce premier travail est en cours de réalisation (stage d'Alexandros Singh), dans lequel nous avons réussi à définir les transferts approchés par transformée de Borel de certains opérateurs.

Le principal objectif de cette thèse est de continuer ce travail et de développer et rendre plus rigoureuse la notion de « match asymptotique » qui est l'outil le plus puissant pour construire ces théorèmes de transfert. Pour cela, nous disposons des résultats théoriques très profonds de la théorie de la résurgence qu'il faudra mettre en œuvre dans le cadre de la combinatoire analytique.

La thèse s'articulera donc ainsi :

- La mise en place d'une approche automatique pour la renormalisation approchées des équations différentiellement algébriques formelles.
- La mise en place d'outils pour résoudre l'asymptotique des équations différentiellement algébriques formelles.
- Transcrire dans le cadre de la combinatoire analytique, les résultats fondamentaux de la théorie de la résurgence afin de rendre rigoureux dans un cadre élargie les techniques des deux premiers items.
- L'application de ces résultats à des problèmes variées.

== Bibliographie ==

Olivier Bodini, Antoine Genitrini, Mehdi Naima:  
Ranked Schröder Trees. ANALCO 2019: 13-26

Olivier Bodini, Julien Courtiel, Sergey Dovgal, Hsien-Kuei Hwang:  
Asymptotic Distribution of Parameters in Random Maps. AofA 2018: 13:1-13:12

Olivier Bodini, Danièle Gardy, Bernhard Gittenberger, Alice Jacquot:  
Enumeration of Generalized BCI Lambda-terms. Electr. J. Comb. 20(4): P30 (2013)

Michael Borinsky:  
Generating Asymptotics for Factorially Divergent Sequences. Electr. J. Comb. 25(4): P4.1 (2018)

=====