

Sujet de thèse

Polyèdres de couvertures de graphes et génération de colonnes

Encadrement de thèse

Cette thèse de l'équipe Algorithmique et Optimisation Combinatoire (AOC) sera effectuée en collaboration avec Pierre Fouilhoux, Maître de Conférences HDR de l'équipe Recherche Opérationnelle (RO) du laboratoire LIP6 de Sorbonne Université.

Directeur de thèse : Roberto Wolfer-Calvo, Professeur (roberto.wolfler@lipn.univ-paris13.fr)
Laboratoire LIPN, Université Sorbonne Paris Nord

Co-directeur de thèse : Pierre Fouilhoux, Maître de Conférences HDR (pierre.fouilhoux@lip6.fr)
Laboratoire LIP6, Sorbonne-Université

Co-encadrant : Mathieu Lacroix, Maître de Conférences (lacroix@lipn.univ-paris13.fr)
Laboratoire LIPN, Université Sorbonne Paris Nord

Résumé

Ce sujet de thèse s'incorpore dans les domaines de recherche que sont l'optimisation combinatoire et la programmation mathématique, avec des applications en recherche opérationnelle.

Cadre des formulations "Set covering" à nombre exponentiel de variables

Parmi les problèmes d'optimisation combinatoire issus de la Recherche Opérationnelle, plusieurs problèmes bien différents reposent sur la structure commune suivante : la couverture d'un graphe par des sous-graphes simples. C'est le cas par exemple du problème de tournées de véhicules qui est un recouvrement par des cycles ou le problème de coloration qui est un recouvrement par des stables. Cette structure, connue sous le nom de "Set Covering" en anglais, permet d'établir des formulations par des programmes linéaires en nombres entiers (PLNE) ayant un nombre exponentiel de variables par rapport à la taille du graphe : dans les exemples précédents, on considère ainsi une variable par cycle ou par stable possible. Ces formulations peuvent être résolues de manière exacte ou approchée par un ensemble de techniques basées sur le principe de génération de colonnes. Ce principe permet de considérer un nombre réduit de variables dans des PLNE pouvant en comporter un nombre exponentiel.

De telles formulations ont plusieurs qualités. Elles contiennent un nombre limité de solutions symétriques, ce qui permet de considérer des schémas de branchement efficaces pour la résolution exacte. Et surtout elles proposent en général une bonne relaxation continue, ce qui permet également d'espérer une bonne garantie expérimentale sur des solutions approchées. Un défaut bien connu des méthodes de génération de colonnes dans ce cas de problèmes de couverture de graphes est la difficulté de convergence de ces méthodes, parfois avec un gain de relaxation continue faible vis-à-vis d'autres formulations.

Plusieurs travaux récents ont montré l'utilité d'ajouter des inégalités valides dans les formulations de ces problèmes de couvertures, induisant ainsi un algorithme dit de Branch&Cut&Price [5, 6, 12]. Ces inégalités ont bien entendu un impact important sur la valeur de relaxation continue mais aussi sur la convergence des méthodes de génération de colonnes. En effet, elles réduisent la combinatoire des problèmes à résoudre.

Étude polyédrale de ces formulations

Les aspects combinatoires des problèmes de couvertures émergent en algorithmique et en théorie des graphes avec un lien fort avec la programmation linéaire. Dans ce cadre, les approches polyédrales consistent à ramener la résolution d'un problème à celle d'un programme linéaire en étudiant le polyèdre formé par l'enveloppe convexe de ses solutions. Les inégalités linéaires définissant ce polyèdre constituent un programme linéaire modélisant le problème. À moins que $P=NP$, il n'est pas possible d'obtenir une description complète des inégalités linéaires du polyèdre P , cependant une description partielle peut être suffisante pour concevoir des algorithmes de résolution efficaces. Ces approches ont fait leur preuve pour la résolution de problèmes d'optimisation combinatoires NP-difficiles. Pourtant, elles ont été principalement étudiées pour des formulations à nombre compact de variables. Ainsi une étude sur les formulations "Set covering" apparaît originale. Une raison de ce manque de travaux est la difficulté de mise en œuvre des techniques dites de Branch&Cut&Price que nous proposons d'étudier ici. Des travaux préparatoires [7, 11] ont proposé un cadre technique possible et ont mis en évidence leur intérêt computationnel.

Une autre perspective sera envisagée au-delà de la résolution des formulations. Il s'agit de la recherche de caractérisation de ces formulations pour des cas polynomiaux. En effet, il existe de nombreux cas d'instances -principalement pour les problèmes de graphes- où un problème NP-difficile devient polynomial : une façon d'aborder une étude de complexité est d'étudier le polyèdre de la formulation dans un cas particulier. L'objectif de telles études, outre leurs intérêts théoriques propres, est de pointer de nouveaux cas polynomiaux de problèmes NP-difficiles, mais aussi des inégalités qui seront très efficaces pour la résolution des problèmes en PLNE.

Plusieurs techniques polyédrales sont envisageables : en particuliers les techniques de composition de polyèdres et les caractérisations par l'aspect box-TDI. Dernièrement des travaux ont permis de caractériser les cas box-TDI de problèmes de couvertures [4], ces formulations "Set covering" proposent un champ d'étude neuf pour la mise en œuvre de ces résultats théoriques.

Trois sujets d'études applicatifs

Des travaux préliminaires ont permis d'estimer que les problèmes de couverture de graphes suivants ont chacun une structure combinatoire particulière : il s'agit de trois problèmes classiques :

- la vaste problématique classique des tournées de véhicules (étudiés par l'équipe AOC du LIPN [1, 3]). Dans ce cadre, des travaux récents [10] insistent sur l'importance de prendre en compte des inégalités valides dans le problème maître,
- le problème classique de coloration de graphes où des instances de faibles dimensions proposées par les bibliothèques standards ne sont toujours pas résolues exactement [11],
- la problématique des coupes dans les graphes (e.g. Max-Cut [9]) et en particulier du problème de la coupe laissant deux sous-graphes connexes, appelé le "bond problem" en anglais [2, 8].

Nous proposons de prendre ces trois problèmes comme sujet d'étude : ils sont à la fois représentatifs de cette problématique de couvertures, excessivement présents en industrie et possèdent des bibliothèques d'instances validées dans la littérature.

Objectifs et résultats attendus

Les travaux de cette thèse se feront selon les deux objectifs suivants.

- *Objectifs théoriques*

Le premier objectif est une étude polyédrale des problèmes de couvertures de graphes dédiés à chacun des trois problèmes cités. Il s'avère, pour le problème de coloration en particulier, que les caractérisations des polyèdres associés contiennent des classes d'inégalités très repérables [11]. Plusieurs approches sont possibles pour cette étude : description fine ou globale de ces inégalités, caractérisation complète dans des cas de graphes particuliers, composition de polyèdres associés à des sous-graphes, caractérisation par les aspects box-TDI...

Les études polyédrales évoquées proposent un cadre de problèmes non étudiés et pourtant bien connus, ce qui intéressera la communauté théorique de mathématiques discrètes. Des publications dans des revues de mathématiques discrètes seront envisagées.

- *Objectifs pratiques*

Le deuxième objectif est une étude algorithmique en programmation mathématique dont l'objectif est d'adapter les algorithmes de génération de colonnes aux inégalités valides supplémentaires. Plusieurs techniques ont été tentées dans la littérature récente pour des cas simples. L'objectif est ici, à l'opposé, de prendre en compte les inégalités les plus utiles pour la relaxation, quitte à ralentir la résolution des sous-problèmes ou à devoir utiliser des encadrements en cas de non-convergence.

Ces techniques étant très utilisées en industrie, les travaux issus de cette thèse seront particulièrement appréciés. D'une part, des publications en revues de recherche opérationnelle et de programmation mathématique seront envisagés. D'autre part, les techniques seront à valoriser dans des partenariats industriels à la suite de la thèse.

Ces deux tâches, l'une théorique et l'autre algorithmique, ont l'ambition de proposer une meilleure compréhension de l'utilisation d'inégalités valides pour les formulations par couverture de graphes en génération de colonnes.

Connaissances et compétences requises.

Le candidat devra avoir de solides connaissances en programmation mathématique et en recherche opérationnelle et une grande maîtrise des approches polyédrales. Une expérience en développement, notamment le développement de méthodes de programmation mathématique (relaxation Lagrangienne, génération de colonnes, génération de contraintes), sera également recherchée.

Bibliographie :

- [1] Baldacci R., Ulrich Ngueveu S., Wolfler Calvo R. (2017). The Vehicle Routing Problem with Transshipment Facilities. *Transportation Science*, 51, 592-606.
- [2] Borne S., Fouilhoux P., Grappe R., Lacroix M. and Pesneau P. (2015). Circuit and bond polytopes on series-parallel graphs. *Discrete Optimization*, 17, 55-68.
- [3] Casazza M., Ceselli A., Wolfler Calvo R. (2018). A branch and price approach for the Split Pickup and Split Delivery VRP *Electron. Notes Discret. Math.*, 69 189-196.
- [4] Chervet P., Grappe R. et Robert L-H (2020) Box-total dual integrality, box-integrality, and equimodular matrices. *Mathematical Programming*, to be published (doi : 10.1007/s10107-020-01514-0).
- [5] Feillet D., Gendreau M., Medaglia, A., José Luis Walteros, J.L. (2010) A note on branch-and-cut-and-price. *Operations Research Letters*, 38 (5), 346-353.
- [6] Fouilhoux P., Mahjoub A.R., Quilliot A. and Toussaint H. (2018) A Branch-and-Cut-and-Price algorithm for the preemptive RCPSP. *RAIRO - Operations Research*, 52 :2, 513-528.
- [7] Fouilhoux, P., Questel, A. (2014). Branch-and-Cut-and-Price using Stable Set polytope inequalities for the Capacitated- Ring-Star Problem *International Symposium on Combinatorial Optimization 2014*, Lisbon, Portugal.
- [8] Grappe R., Lacroix M. (2018) The st-bond polytope on series-parallel graphs *RAIRO - Operations Research* 52(3), 923-934.
- [9] Barahona F., Ali Ridha Mahjoub A.R. (1986). On the cut polytope *Mathematical programming* 36(2), 157-173.
- [10] Pecin D. , Artur Alves Pessoa, A.A., Poggi M., Uchoa E. (2017). Improved branch-cut-and-price for capacitated vehicle routing. *Mathematical Programming Computation*, 9(1) 61-100.
- [11] Ternier, I-C. (2014). Coloration de graphes et programmation entière. *Rapport de stage de Master 2* (encadrement Fouilhoux P.).
- [12] Vanderbeck F. (2019). Coluna.jl project : a collaborative framework for general BCP. *20ème séminaire du groupe POC*, Paris.